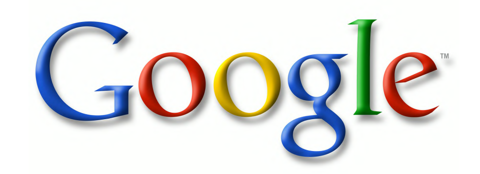
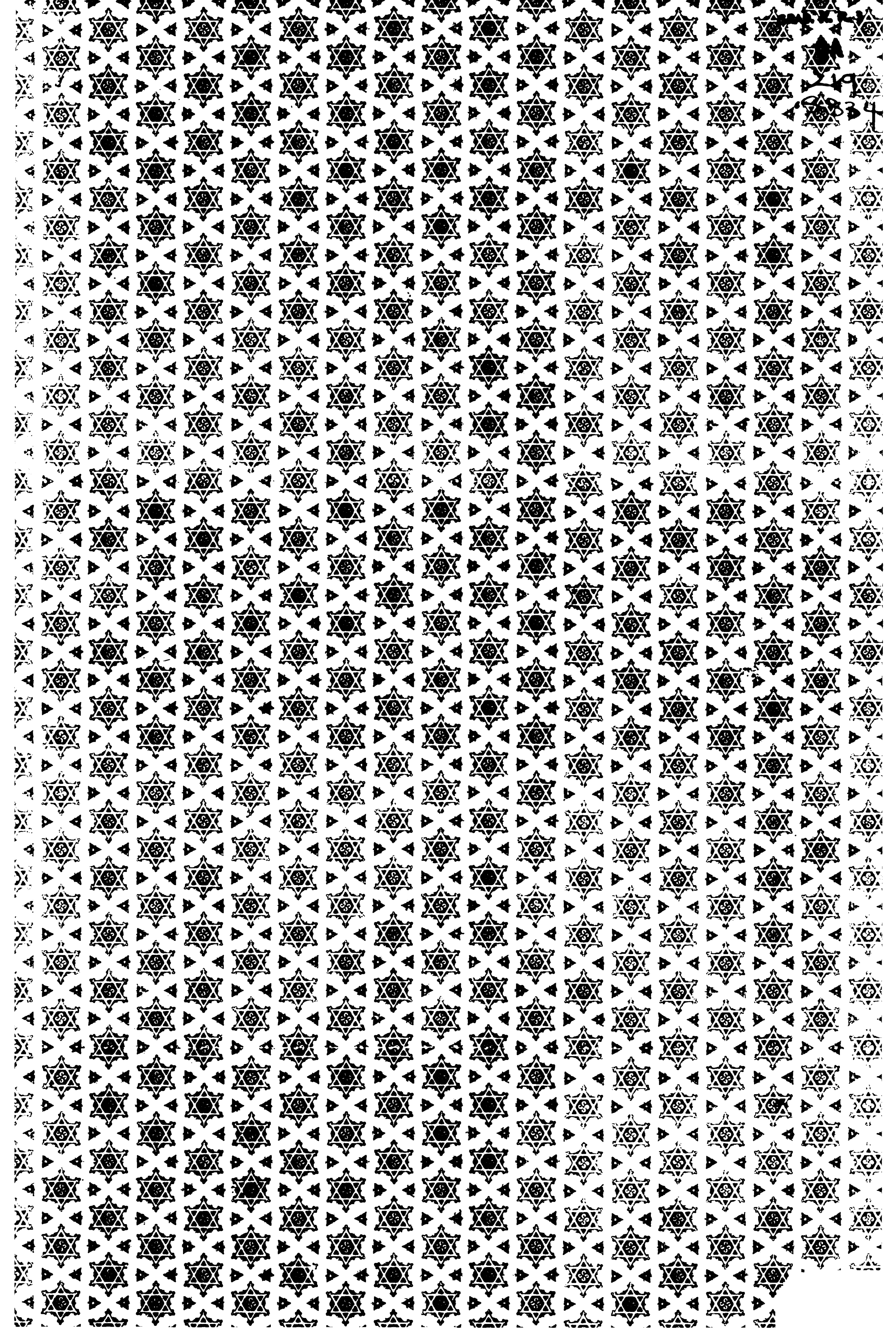
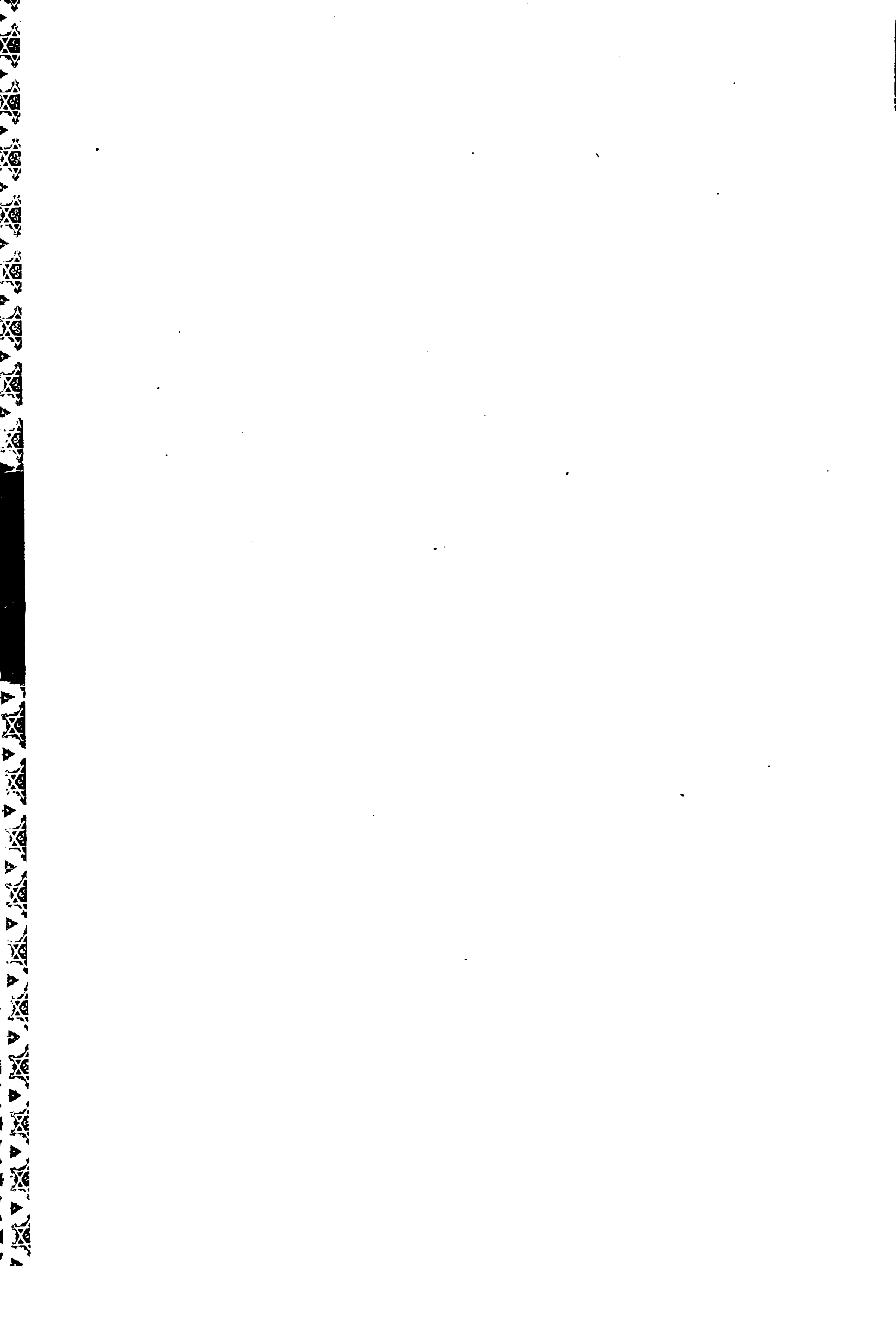




ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE





ÜBER DIE NOMOGRAPHIE VON M. D'OCAGNE.

EINE EINFÜHRUNG IN DIESES GEBIET

VON

DR. FRIEDRICH SCHILLING,
A. O. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT GÖTTINGEN.

MIT 28 ABBILDUNGEN.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1900.

Vorwort.

Die vorliegende Schrift, ein Referat über den *Traité de Nomographie* von *Maurice d'Ocagne* (XIV und 480 Seiten, Paris, Gauthier-Villars, 1899), stellt die weitere Ausführung eines Vortrages dar, den ich im Winter-Semester 1899/1900 in der Mathematischen Gesellschaft der Universität Göttingen zu halten die Ehre hatte. Die Anregung dazu gab mir Herr Geheimrat *Klein*, wofür ich ihm zu lebhaftem Danke mich verpflichtet fühle. Da dieser Zweig der angewandten Mathematik besonders im deutschen Sprachgebiet zur Zeit noch wenig bekannt sein dürfte, so habe ich mich auch nicht entschliefsen können, mit einer kurzen, allgemein gehaltenen Besprechung des bedeutenden Originalwerkes mich zu begnügen, zumal solche bereits mehrfach vorliegen. Ich nenne z. B. das Referat von *Jules Tannery* in dem Bulletin des Sciences mathématiques vom Juli 1899, p. 172—182 und das von *Lacombe* in der neuen Zeitschrift von Laisant und Fehr, l'Enseignement mathématique, vom Sept. 1899, p. 368—370. Vielmehr ziehe ich es vor, zugleich eine Einführung in dieses Gebiet zu geben mit der Absicht, einen gröfseren Leserkreis für die neuen Ideen zu interessieren. So habe ich, zwar im Anschlusse an das Originalwerk, eine freiere Darstellung gewählt, die auch an sich verständlich sein soll. Wiederholt aber habe ich auf ersteres hingewiesen, das ich mit dem einfachen Buchstaben „0“ citieren will. Ja, es sei offen ausgesprochen, es soll geradezu der Hauptzweck der vorliegenden Arbeit sein, zum Studium des Originalwerkes selbst anzureizen, in dem noch eine grofse Fülle interessanter Gedanken enthalten ist, auf die ich hier nicht eingehen konnte.

Von der grofsen Bedeutung der Nomographie in allen Disziplinen der angewandten Mathematik mag die Arbeit selbst ein Zeugnis ablegen. Ich bin der Ansicht, dafs jedenfalls in den Vorlesungen über Graphische Statik, wie sie besonders an den Technischen Hochschulen regelmäfsig gehalten werden, nicht versäumt werden sollte, wenige Stunden auch den Methoden der Nomographie zu widmen. Erwähnen möchte ich

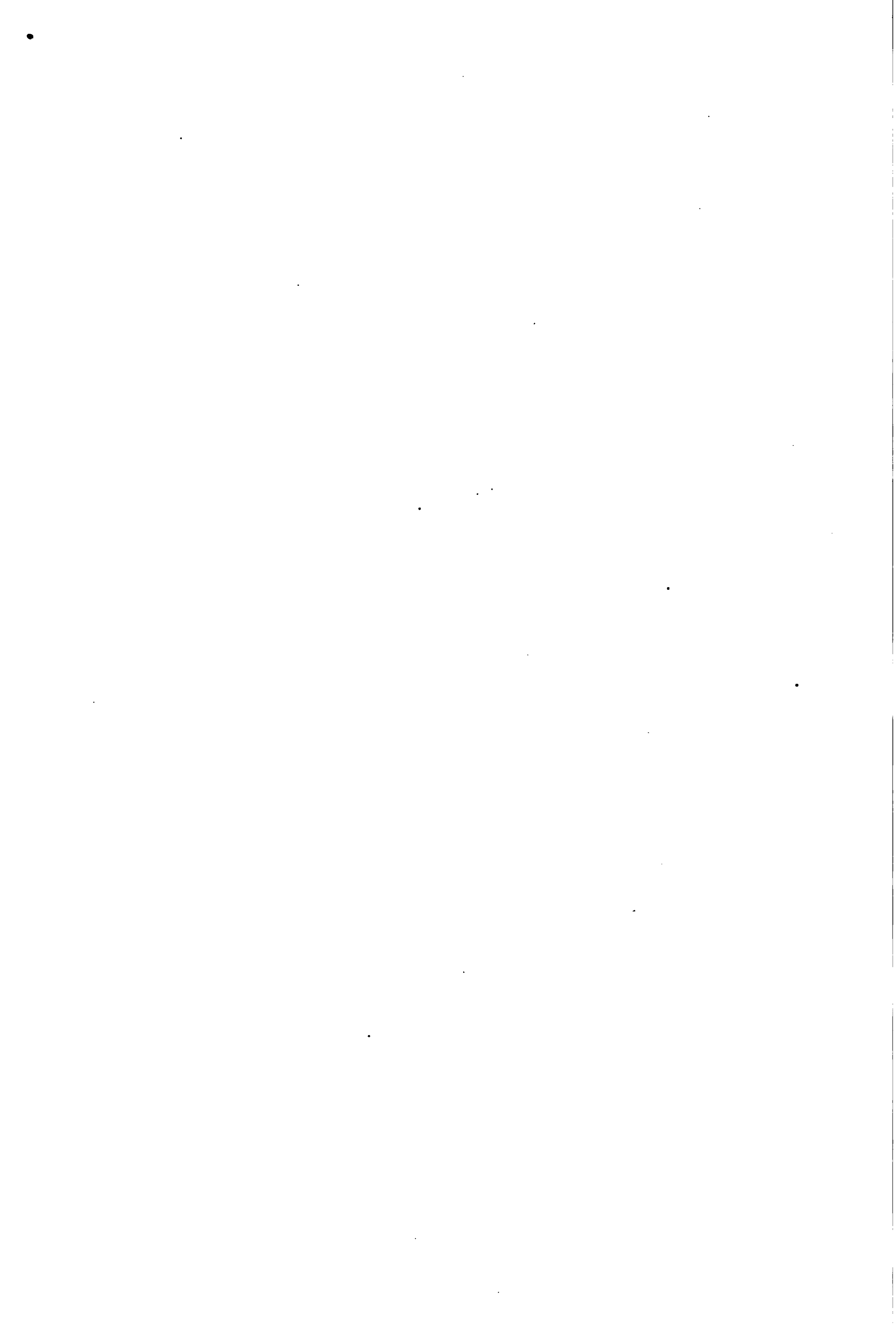
noch eine jüngst erschienene Arbeit von Herrn *Mehmke* in Stuttgart: Beispiele graphischer Tafeln mit Bemerkungen über die Methode der fluchtrechten Punkte, Zeitschrift für Mathematik und Physik Bd. 44, p. 56—62 (1899), die besonders wegen ihrer historischen Bemerkungen beachtenswert ist.

Ganz besonders dankbar bin ich Herrn Prof. *M. d'Ocagne* selbst, sowie der Verlagshandlung von *Gauthier-Villars* in Paris, die in liebenswürdigstem Entgegenkommen mir die Abbildungen des Originalwerkes zur Verfügung gestellt haben.

Göttingen, im März 1900.

Fr. Schilling.

Inhaltsverzeichnis.



Einleitung.

In dem kürzlich erschienenen Werke, *Traité de Nomographie* von *Maurice d'Ocagne*, stellt der Verfasser, Ingenieur und Professor an der École des Ponts et Chaussées in Paris, die Resultate sowohl der Arbeiten anderer als auch besonders seiner eigenen Forschungen im Zusammenhange dar, die er seit 1884 in etwa 30 Einzelabhandlungen und einem 1891 als „Essai d'une théorie générale" erschienenen kleinen Buche veröffentlichte. Wenn ich von dem Inhalt dieses Werkes über den jüngsten Zweig der angewandten Mathematik, das ich in einem kurzen Referate bereits in der Physikalischen Zeitschrift Bd. I, p. 151—152 besprochen habe, berichten soll, so möchte ich zunächst kurz angeben, was unter „Nomographie" überhaupt zu verstehen ist.

Bekannt sind die graphischen Methoden für die Auflösung von Gleichungen oder Gleichungssystemen, wie sie beispielsweise in der Graphischen Statik zu hoher Vollkommenheit ausgebildet sind. Hiermit nahe verwandt und doch davon verschieden ist die Nomographie. Während man dort in jedem einzelnen Falle eine geometrische Konstruktion ausführen mufs, um die gesuchten Gröfsen, etwa als Strecken, zu erhalten, hat die Nomographie Methoden zur Konstruktion von Rechentafeln (abaques) ausgebildet. Eine einzelne solche Tafel, die einer bestimmten durch eine oder mehrere vorgegebene Gleichungen definierten Abhängigkeit zwischen veränderlichen Gröfsen entspricht, gestattet, nachdem sie einmal gezeichnet vorliegt, unmittelbar die Werte der abhängigen Variablen aus ihr zu entnehmen, wenn die unabhängigen irgend welche speziellen Werte erhalten. Die Nomographie will also einen Ersatz bieten für die Aufstellung von Tabellen, die besonders dann im allgemeinen recht umständlich sind, wenn es sich um Gleichungen zwischen mehr als zwei Variablen handelt. Diese Rechentafeln bieten dementsprechend oft denselben Vorteil, wie eine graphische Darstellung einer Funktion, z. B. eine Temperaturkurve, was die Übersicht über den gesamten Verlauf betrifft.

Ein Vorzug des Werkes ist es, dafs stets die allgemeinen Betrachtungen durch zahlreiche spezielle Beispiele erläutert werden. Diese gewähren vor allem auch einen Einblick in die überaus mannigfaltige Verwendbarkeit der entwickelten Methoden in allen Gebieten, auf die überhaupt die Mathematik Anwendung findet; wir nennen neben der Physik Ingenieurwesen, Schiffsbaukunde, Nautik, Astronomie, Topographie, Versicherungs- und Finanzwissenschaft, Geodäsie, Militärwesen u. s. w.

Doch auch für den Mathematiker bieten die Untersuchungen, wie wir noch sehen werden, insofern Interesse, als einmal die projektive Geometrie, insbesondere die projektive Erzeugung der Kegelschnitte, die Verwandtschaften der Kollineation und Reciprocität, fruchtbarste Anwendung findet, andererseits am Schlusse des Buches eine Reihe rein theoretischer Untersuchungen durchgeführt wird, die von interessanten mathematischen Problemstellungen ausgehen.

---

§ 1.

Begriff der Funktionsskala.

Die ganzen folgenden Betrachtungen werden beherrscht von dem wichtigen Begriff der „*Funktionsskala*" (échelle de la fonction). Es handelt sich übrigens stets um eindeutige Funktionen oder doch eindeutige Funktionszweige. Um die Skala einer gegebenen Funktion $f(\alpha)$ der unabhängigen Variablen α zu erhalten, denke man für die in arithmetischer Progression fortschreitenden speziellen Werte $\alpha', \alpha'', \cdots \alpha^{(n)}$ die zugehörigen Gröfsen $x = l \cdot f(\alpha)$, wo man über den konstanten „*Modul*" l noch zweckmäfsig verfügen kann, als Abscissen auf einer Geraden von einem bestimmten Anfangspunkte aus abgetragen und an die durch kleine Striche gekennzeichneten Endpunkte nicht die Funktionswerte, sondern die Werte der unabhängigen Variablen α eingetragen. Die Bedeutung des Moduls beruht im wesentlichen darin, dafs man es durch geeignete Annahme desselben noch in der Hand hat, sei es über die Gesamtlänge der Skala $L = l \cdot (f(b) - f(a))$, wo a und b die „Grenzen" des Intervalles sind, das die Variable α durchlaufen soll, sei es über das Minimum des zu aufeinanderfolgenden Werten gehörenden Intervalles $l \cdot (f(\alpha^{(i)}) - f(\alpha^{(i-1)}))$ der Skala zu verfügen. Besonders häufig kommen folgende Skalen vor:

1) *die reguläre Skala* $f(\alpha) = \alpha$,

2) *die logarithmische Skala* $f(\alpha) = \log \alpha$,

3) *die lineare Skala* $f(\alpha) = \frac{p\alpha + q}{r\alpha + s}$, wo $ps - qr \gtrless 0$ sei.

Die letzte ist offenbar aus der ersten durch Projektion abzuleiten. Die logarithmische Skala sei beispielsweise durch Fig. 1 (**O.** p. 10) gegeben,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Fig. 1.

wo α den aufeinander folgenden Teilstrichen entsprechend zwischen 1 und 2 je um 0,02, zwischen 2 und 5 je um 0,05, zwischen 5 und 10 je um 0,1 wächst und $l = 125$ mm gewählt ist.

§ 2.

Rechentafeln für Gleichungen zwischen zwei Variablen.

Wir wollen nun der Reihe nach die Methoden der Rechentafeln für Gleichungen mit zwei, mit drei und mit vier oder mehr Variablen betrachten.

Für Gleichungen $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ zwischen den beiden Variablen α_1, α_2 bieten sich *zwei Methoden* dar, die wir sogleich an Beispielen erläutern können:

I. Rechentafeln mit vereinigten Skalen (abaques à échelles accolées).

Der in Minuten ausgedrückte Depressionswinkel δ des Meereshorizontes wird, wenn man der Refraktion Rechnung trägt, als Funktion der Höhe h des Beobachters über dem Meeresspiegel durch die Formel

$$\delta = 1{,}8385\sqrt{h}$$

gegeben. Um die zugehörige Rechentafel zu erhalten, hat man nur auf derselben Abscissenachse die Funktionsskalen:

$$x_1 = l \cdot \delta = 8 \text{ mm} \cdot \delta$$

und

$$x_2 = l \cdot 1{,}8385\sqrt{h} = 14{,}708 \text{ mm} \cdot \sqrt{h}$$

zu konstruieren, wie die Fig. 2 (**O.** p. 19) zeigt. Für $h = 15^m$ z. B. sieht

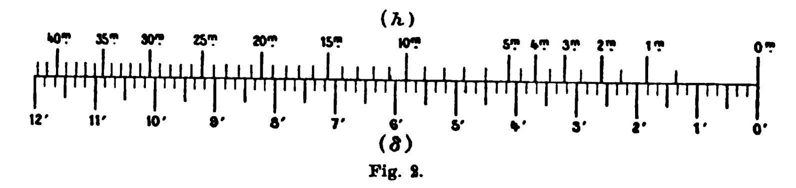


Fig. 2.

man unter dem als solchen bezeichneten Punkte der Figur den gesuchten Wert $\delta = 7' 7''$ stehen. Diese Methode ist unmittelbar anwendbar für Gleichungen der Form $f_1(\alpha_1) = f_2(\alpha_2)$.

II. Cartesische Rechentafeln (abaques cartésiens).

Als Beispiel der Funktion $f(\alpha_1, \alpha_2) = 0$ sei die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung wohlbekannte Funktion:

$$N = 1000 \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\varrho} e^{-\varrho^2} d\varrho$$

gewählt, wo ϱ und N den Bezeichnungen α_1 und α_2 entsprechen.

Man setze $x = l_1 \alpha_1$ und $y = l_2 \alpha_2$, wo x, y rechtwinklige Koordinaten seien, mit anderen Worten: man trage auf den Koordinatenachsen zwei reguläre Skalen mit geeigneten Moduln auf. Je zwei zusammengehörende Werte α_1, α_2 werden dann mit Hülfe der durch die Gleichung

$$f(\alpha_1, \alpha_2) = f\left(\frac{x}{l_1}, \frac{y}{l_2}\right) = 0$$

dargestellten Kurve auf einander bezogen (Fig. 3, **O.** p. 25).

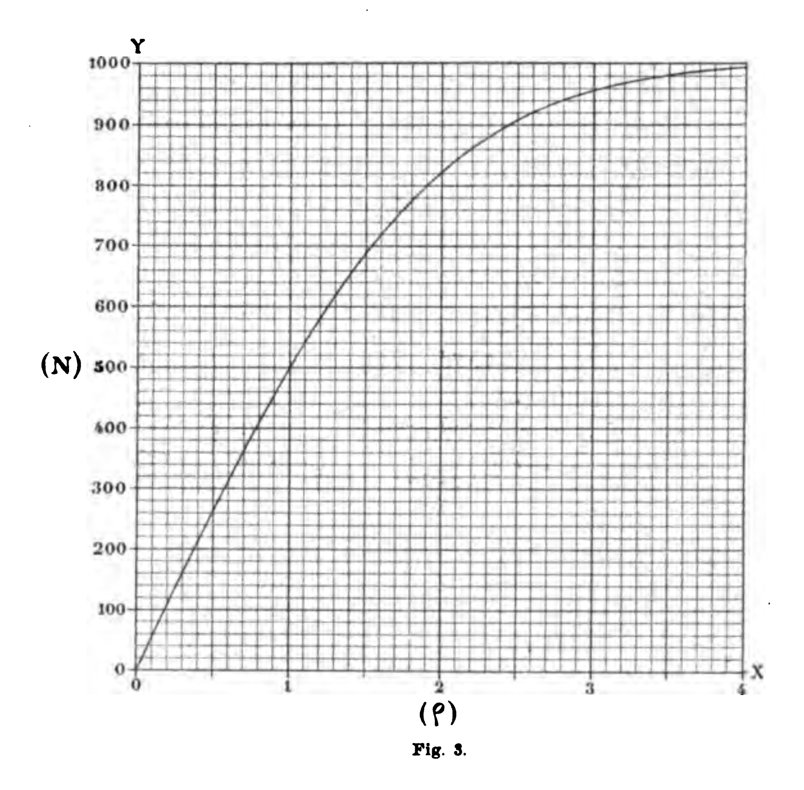


Fig. 3.

Zu dieser letzten Methode möchte ich indes noch eine Bemerkung machen, auf die wir später zurückkommen. Will man sich nicht des Koordinatenpapiers bedienen, so kann man z. B. auch eine transparente Ebene, aus Glas oder Celluloid, mit zwei als „Indices“ aufgezeichneten, zu einander rechtwinkligen Geraden bei der Ablesung benutzen, die den Achsen parallel zu orientieren sind, während ihr Schnittpunkt auf der gezeichneten Kurve sich zu bewegen hat.

§ 3.

Rechentafeln mit Kurvenkreuzung für Gleichungen zwischen drei Variablen.

Gehen wir jetzt sogleich zu den Gleichungen zwischen drei Variablen über. Hier haben wir zwei wesentlich verschiedene Arten von Rechentafeln zu nennen, *die Rechentafeln mit Kurvenkreuzung* (abaques à entrecroisement) und *die collinearen Rechentafeln* (abaques à points allignés). Erstere, die wir allein in diesem Paragraphen besprechen, zerfallen ihrerseits wieder in *vier Unterarten.*

I. Cartesische Rechentafeln (abaques cartésiens).

Sie stellen gewissermafsen die Verallgemeinerung der cartesischen Rechentafeln für zwei Variable dar. Es sei die Gleichung $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ zwischen den drei Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ gegeben, speziell z. B. $\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3 = 0$. Setzen wir wieder wie oben $x = l_1 \alpha_1$, $y = l_2 \alpha_2$, so stellt die gegebene Gleichung in der Form $f\left(\frac{x}{l_1}, \frac{y}{l_2}, \alpha_3\right) = 0$ für variable Werte α_3 eine ganze Kurvenschar dar, in unserem Beispiel, wo übrigens $l_1 = l_2 = 5$ mm gewählt ist, eine Schar gleichseitiger Hyperbeln (Fig. 4, **O.** p. 37).

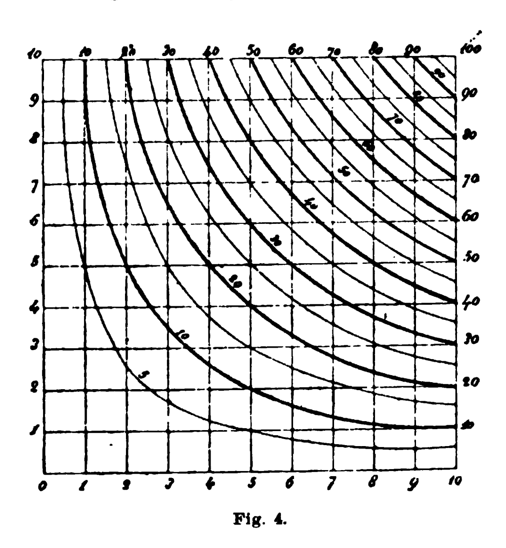


Fig. 4.

Diese Kurven sind, soweit es nötig ist, für eine Reihe von Werten α_3, die zweckmäfsig wieder in arithmetischer Progression fortschreiten, zu zeichnen, und jeder Kurve ist überdies als „*Cote*“ der Wert des zugehörigen Parameters α_3 beizufügen. Sind dann aufser dieser Kurven-

schar (α_3) auch durch die „cotierten“ Punkte der Skalen auf den Koordinatenachsen die Parallelgeraden bez. zur Ordinaten- und Abscissenachse als Kurvenscharen (α_1) und (α_2) gezeichnet, so können wir den Satz aussprechen:

Drei Werte α_1, α_2, α_3 befriedigen die gegebene Gleichung, wenn die drei zugehörigen cotierten Kurven durch denselben Punkt gehen.

Diesem Satze entsprechend ist die Anwendung einer derartig gezeichneten Rechentafel von selbst einleuchtend. Die in Fig. 4 wiedergegebene „Multiplikationstafel“ bietet insofern noch besonderes Interesse, als sie überhaupt die erste bekannte graphische Rechentafel darstellt; sie wurde von *Pouchet* im Jahre 1795 konstruiert. Die Einteilung des Quadrats der Figur in Teilquadrate nach Art eines Schachbrettes (ἄβαξ) hat überhaupt Anlafs zur Bezeichnung der Rechentafeln als „abaques“ gegeben.

Natürlich hat man es in der Hand, welche der drei Variablen α_1, α_2, α_3 man zum „Cotieren“ der x- und y-Achsen benutzen will. Im allgemeinen wird es zweckmäfsig sein, diejenigen Variablen hierzu zu benutzen, die als „unabhängige“ zu gelten pflegen. Von Interesse dürfte noch der Hinweis sein, dafs die gezeichneten Kurven (α_3) nichts anderes sind als die orthogonalen Projektionen auf die xy-Ebene von den Höhenkurven derjenigen Fläche, welche durch die gegebene Gleichung für $x = l_1\alpha_1$, $y = l_2\alpha_2$, $z = l_3\alpha_3$ in rechtwinkligen Koordinaten dargestellt wird.

Ausgezeichnet unter den cartesischen Rechentafeln sind wegen ihrer Einfachheit diejenigen, für welche *die Kurven (α_3) ebenfalls gerade Linien* sind. Gerade dieser Fall bietet sich übrigens in der Praxis besonders häufig dar. *Als notwendige und hinreichende Bedingung für sein Eintreten gilt, dafs die gegebene Gleichung sich in die Form setzen läfst:*

$$\alpha_1 \cdot f(\alpha_3) + \alpha_2 \varphi(\alpha_3) + \psi(\alpha_3) = 0.$$

Sollte die Geradenschar (α_3) eine zweckmäfsig gelegene Enveloppe besitzen, so kann man geradezu das Ziehen der Geraden selbst ersparen, wenn man statt dessen die Enveloppe zeichnet und an ihre Berührungspunkte mit den Geraden die Coten der letzteren einträgt.

Wir wollen noch ein Beispiel einer cartesischen Rechentafel mit drei Scharen gerader Linien etwas näher ausführen. Ist p das in Gramm angegebene Gewicht des in 1 cbm Luft von t^0 C enthaltenen Wasserdampfes, dessen Spannkraft f mm ist, so besteht folgende Beziehung:

$$p = \frac{810 f}{760 + 2{,}78\, t}.$$

Die Spannkraft f ferner ist als eine empirisch nach der Tabelle von Regnault bestimmte Funktion der auf dem Hygrometer abgelesenen Con-

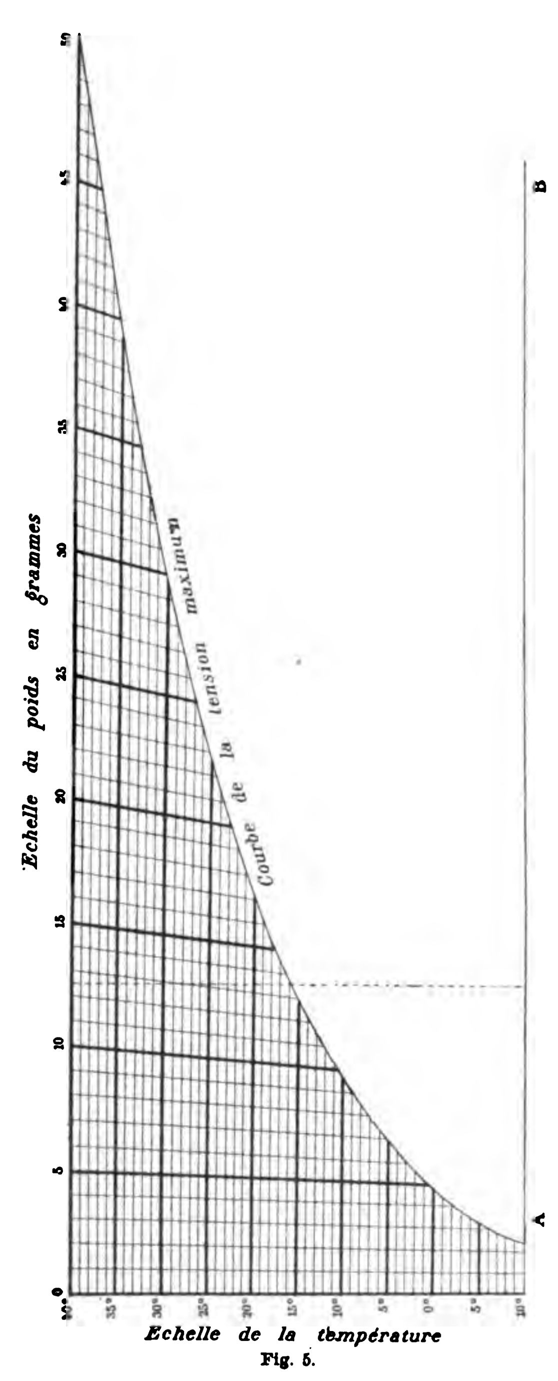


Fig. 5.

densationstemperatur t' gegeben zu denken. Wir setzen jetzt:

$$x = l_1 \cdot 810 f,$$
$$y = l_2 \cdot 2{,}78\, t,$$

wo die Moduln l_1, l_2 in der Fig. 5 (**O.** p. 47) die Werte

$$l_1 = 0{,}0037 \text{ mm} \quad \text{und}$$
$$l_2 = 0{,}43 \text{ mm}$$

erhalten haben. Durch Substitution in obige Gleichung ergiebt sich:

$$760 p + p \cdot \frac{y}{l_2} - \frac{x}{l_1} = 0.$$

Diese Gleichung stellt dem Parameter p entsprechend ein Büschel von Geraden, „Radianten", dar, die sämtlich durch den Punkt $x = 0$, $y = -l_2 \cdot 760$ mm gehen. In der Figur (die um 90^0 gedreht zu denken ist) sehen wir auf der Ordinatenachse die Skala der Temperatur mit den Parallelen durch die Teilpunkte zur Abscissenachse, auf der oberen Begrenzungsgeraden die Werte von p, welche den einzelnen ausgezogenen Radianten entsprechen. Die noch eingezeichnete Begrenzungskurve (courbe de la tension maximum) stellt die zwischen den Werten f und t' bestehende Funktion graphisch dar, wobei wieder

$$x = 3 \text{ mm} \cdot f \quad \text{und}$$
$$y = 1{,}2 \text{ mm} \cdot t'$$

gesetzt ist. Der Gebrauch dieser Tafel ist aus folgendem Zahlenbeispiel zu entnehmen: Es sei

$t = 30^0$ und $t' = 16^0$ gegeben. Man gehe auf der Horizontalgeraden durch den mit 16^0 bezeichneten Ordinatenpunkt bis zum Schnittpunkt mit der Kurve, dann von diesem mit Hülfe eines in der Richtung der Abscissenachse beweglichen „Index“, der in der Figur gestrichelt angedeutet ist, parallel zur Ordinatenachse nach oben bis zum Schnittpunkt mit der durch den Ordinatenpunkt 30^0 gehenden Horizontalgeraden. Die durch den letztgenannten Schnittpunkt gehende Radiante trägt als Cote den gesuchten Zahlenwert $p = 12{,}9$ g.

II. Cartesische Rechentafeln mit geometrischer Anamorphose (abaques cartésiens avec anamorphose géométrique).

Der grofse Vorteil, den besonders für die Herstellung der Tafeln der Fall darbietet, dafs auch die Kurven (α_3) Gerade sind, legt die Frage nahe, ob nicht noch in allgemeineren Fällen (vgl. p. 13) Gleiches zu erreichen möglich ist. Eine Verwirklichung dieses Gedankens gewinnen wir, wenn wir auf den Achsen eines rechtwinkligen Koordinatensystems jetzt auf Grund von Gleichungen $x = l_1 f_1(\alpha_1)$, $y = l_2 f_2(\alpha_2)$ *allgemeine* Funktionsskalen zu konstruieren uns vornehmen.

Stets dann und nur dann sind auch die Kurven (α_3) *nunmehr gerade Linien, wenn die gegebene Funktion* $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ *sich in die Form setzen läfst:*

$$f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0.$$

Dieser Methode, die gegebene Gleichung wenn möglich in eine solche Form überzuführen und für sie, wie angegeben, die Rechentafel zu konstruieren, wurde von *Léon Lalanne* (O. p. 51)*) der Name „geometrische Anamorphose“ gegeben. Nach wie vor gilt natürlich der erste Satz der Seite 13.

1) Die Geraden (α_3) können nun im speziellen Falle z. B. ein *Strahlbüschel durch den Koordinatenanfangspunkt* bilden (abaques à radiantes). Die gegebene Gleichung hat dann die Form:

$$f_1(\alpha_1) \cdot f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) = 0.$$

Ein interessantes Beispiel dieser Art giebt die Gleichung

$$\operatorname{tang} \varphi \cdot \operatorname{tang} \delta + \cos \varepsilon = 0,$$

welche aus der geographischen Breite φ des Beobachtungsortes und der Deklination δ der Sonne in dem betrachteten Zeitpunkt den Stundenwinkel ε im Augenblick ihres Auf- oder Unterganges zu finden gestattet. Man setze:

$$f_1(\alpha_1) = \frac{x}{l_1} = \operatorname{tang} \varphi, \quad f_2(\alpha_2) = \frac{y}{l_2} = \cos \varepsilon.$$

*) Mémoire sur les Tables graphiques et sur la Géométrie anamorphique, Annales des Ponts et Chaussées, 1846, I.

Da die Gleichungen der Geraden (α_3) dann

$$y = -\frac{l_2}{l_1} \cdot x \cdot \operatorname{tang} \delta$$

lauten, so ist, wenn man noch $l_2 = -l_1$ wählt, die einem bestimmten Werte δ entsprechende Gerade gegen die positive Richtung der x-Achse einfach unter dem Winkel δ geneigt (Fig. 6, O. p. 57). Die Schar der

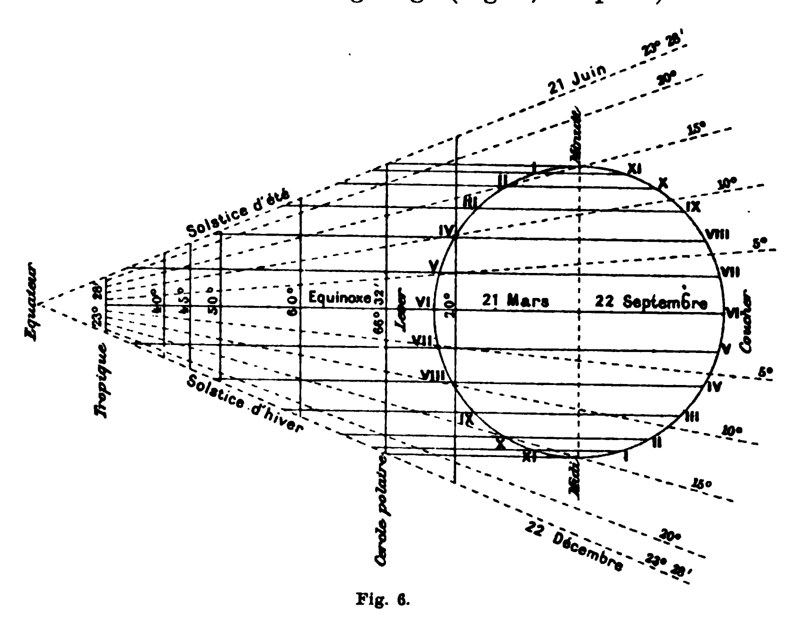


Fig. 6.

zur Abscissenachse parallelen Geraden (α_2) wird in der Figur durch einen mit dem Radius l_2 beschriebenen Kreis aufgefangen, dessen Mittelpunkt willkürlich auf der x-Achse zu wählen ist. An den Schnittpunkten zwischen Geraden und Kreis sind entweder die zugehörigen Werte ε oder sogleich die ihnen entsprechenden wahren Zeiten des Auf- und Unterganges der Sonne als Coten der genannten Geradenschar (α_2) eingetragen.*)

2) Ebenso einfach ist der zweite spezielle Fall, dafs die Geraden (α_3) ein *Parallelstrahlenbüschel* bilden (abaques à parallèles). Dann mufs die gegebene Gleichung die folgende Form (bei zweckmäfsiger Änderung in der Bezeichnung der allgemeinen Funktionen) annehmen:

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) = 0.$$

Der Richtungskoefficient der Parallelgeraden (α_3) ist einfach gleich $-\frac{l_2}{l_1}$.

*) Die Figur stellt eine Vereinfachung einer von *Collignon* konstruierten Rechentafel (Nouvelles Annales de Mathém. 2. Série, t. 18, p. 179 und 3. Série, t. 1, p. 490) dar, welche auch von der wahren zur mittleren Zeit überzugehen gestattet und selbst auf die Dauer der Dämmerung Rücksicht nimmt.

Ein hierher gehörendes Beispiel giebt die bekannte Formel für sphärische Spiegel und Linsen:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}.$$

Der Fig. 7 (**O.** p. 54) entsprechend ist $x = \frac{l}{d}$, $y = \frac{l}{d'}$ und $l = 3{,}5$ cm gesetzt worden, so dafs die cotierten Geraden (f) die Gleichung haben

$$x + y = \frac{l}{f}.$$

Die Parallelgeraden (α_3) brauchte man offenbar, wenn man wollte, gar nicht zu zeichnen, wenn man statt dessen nur an ihre Schnittpunkte mit

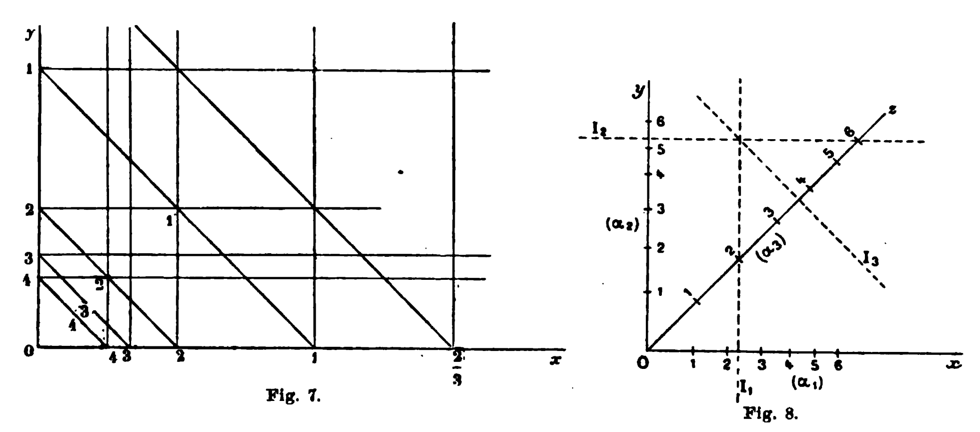


Fig. 7.

Fig. 8.

dem Lote vom Koordinatenanfangspunkt die zugehörigen Coten α_3 hinsetzte, mit anderen Worten, wenn man auf dem genannten Lote einfach die Funktionsskala $z = l_3 f_3(\alpha_3) = \frac{l_1 l_2}{\sqrt{l_1^2 + l_2^2}} \cdot f_3(\alpha_3)$ auftrüge. Freilich würde man sich dann zum Ablesen zusammengehörender Werte $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ wieder eines beweglichen Index, etwa auf einer Glasscheibe, bedienen müssen, der aus drei zu den xyz-Achsen senkrechten, sich in demselben Punkte schneidenden Geraden zu bestehen hätte. Die Anwendung eines solchen Index dürfte von selbst klar sein (Fig. 8, **O.** p. 69).

Es sei noch folgendes bemerkt: Die Gleichungsform des unter 1) behandelten speziellen Falles $f_1(\alpha_1) \cdot f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) = 0$ läfst sich durch Logarithmieren in die Form überführen:

$$\log f_1(\alpha_1) - \log(-f_2(\alpha_2)) + \log f_3(\alpha_3) = 0,$$

wobei wir der Einfachheit halber annehmen wollen, dafs nur positive Werte der zu logarithmierenden Funktionen in Betracht kommen, da andernfalls eine kleine Modifikation unserer Betrachtung eintreten müfste. Die letzte Gleichungsform ist aber ersichtlich, von der Bezeichnung ab-

gesehen, identisch mit derjenigen des zweiten speziellen Falles. „*Jede Gleichung, die durch eine 'Rechentafel mit Radianten' darstellbar ist, ist es demnach auch durch eine solche mit Parallelgeraden und umgekehrt*". Das diesem Übergang zu Grunde liegende Prinzip wird als „logarithmische Anamorphose" bezeichnet.

III. Hexagonale Rechentafeln (abaques hexagonaux).

Wenn wir bei den p. 16 beschriebenen Rechentafeln mit Parallelen für Gleichungen der Form $f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) = 0$ $l_1 = l_2 = l$ setzen, so wird $l_3 = \frac{l}{\sqrt{2}}$ und $x + y = \frac{z}{\sqrt{2}}$, d. h. die drei zur Cotierung der xyz-Achsen verwandten Moduln können nicht einander gleich gewählt werden. Um nun den Wunsch erfüllen zu können, in Gleichungen der genannten Art alle drei Variablen gleich zu behandeln, werden wir zur Einführung des sogenannten „*hexagonalen Koordinatensystems*" geführt. Diesem liegen wieder drei von einem Punkte ausgehende xyz-Achsen zu Grunde, doch sind diese jetzt den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks parallel (Fig. 9, O. p. 72). Ist noch auf jeder Achse die positive Richtung fixiert, so wollen wir als Koordinaten x, y, z eines Punktes die vom Anfangspunkte aus gerechneten Abschnitte bezeichnen, welche die Lote vom Punkte auf den drei Achsen abschneiden.*) Offenbar besteht der Figur entsprechend zwischen den drei Koordinaten jetzt die Beziehung $x + y = z$ dem geometrischen Satz entsprechend: Die Projektion eines Vectors auf die Halbierende eines Winkels von 120^0 ist gleich der Summe der Projektionen dieses Vectors auf die Schenkel des Winkels. Ausgehend von der obigen Gleichung haben wir daher zu setzen:

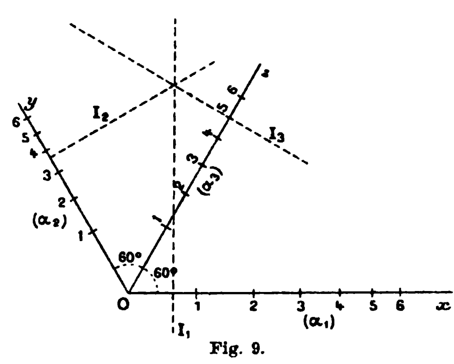


Fig. 9.

$$x = l \cdot f_1(\alpha_1),$$
$$y = l \cdot f_2(\alpha_2),$$
$$z = -\, l \cdot f_3(\alpha_3),$$

so dafs hiermit vollständige Symmetrie erreicht ist, von Vorzeichen abgesehen, was offenbar unwesentlich ist. Ein Beispiel wollen wir hier nicht weiter anführen.

*) Diese Art der Rechentafeln ist zuerst von *Lallemand* eingeführt worden, Comptes rendus 1886.

IV. Cartesische Rechentafeln mit allgemeiner Anamorphose (abaques cartésiens avec anamorphose générale).

Bestanden bei allen bisher beschriebenen Methoden wenigstens die beiden Kurvenscharen für die Variablen α_1 und α_2 aus Parallelgeraden, so werden wir nunmehr eine weit allgemeinere Methode gewinnen, von der die bisher behandelten spezielle Fälle sind, wenn wir diese Beschränkung fallen lassen. Wir können am besten geradezu in formaler Weise ausgehen von drei Gleichungen:

$$F_1(x, y, \alpha_1) = 0, \quad F_2(x, y, \alpha_2) = 0, \quad F_3(x, y, \alpha_3) = 0.$$

Der Einfachheit halber wollen wir x und y im folgenden als rechtwinklige Koordinaten deuten, jedoch ausdrücklich hervorheben, dafs unsere Betrachtung natürlich auch z. B. für ein Polarkoordinatensystem oder sonst ein anderes System Geltung behält. Jede der genannten Gleichungen stellt dann dem Parameter α_i entsprechend ein System allgemeiner „cotierter" Kurven dar. Durch Elimination der Koordinaten x, y aus den drei Gleichungen möge sich die Gleichung $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ ergeben. Wird umgekehrt eine solche Gleichung vorangestellt, so kann man noch zwei der Gleichungen $F_i = 0$, allgemein gesprochen, willkürlich wählen, die dritte ergiebt sich durch Elimination der beiden Parameter, die in den schon angenommenen Gleichungen $F_i = 0$ vorkommen. *Jede Gleichung zwischen drei Variablen kann also dargestellt werden durch drei Systeme cotierter Kurven, von denen zwei willkürlich zu wählen sind.* Diese Methode, die Gleichung $f = 0$ durch drei Gleichungen $F_i = 0$ zu ersetzen, bezeichnet man kurz als die Methode der Trennung der Variablen. Die Benutzung einer so entstehenden Rechentafel wird hinlänglich durch den Satz beschrieben: *Der Wert der etwa als Unbekannte gewählten Variablen α_3 ist durch die Cote derjenigen Kurve des Systems (α_3) gegeben, welche durch den Schnittpunkt der den gegebenen Werten α_1 und α_2 entsprechenden beiden Kurven hindurchgeht.**)

Nun ist es natürlich, dafs man als Kurvenscharen solche bevorzugen wird, die sich leicht zeichnen lassen, insbesondere also solche, die aus Kreisen oder Geraden bestehen. Doch sei ausdrücklich bemerkt, dafs letztere nicht mehr parallel zu sein brauchen, wie es wohl früher der Fall war. Ehe wir jedoch dazu übergehen, die bisher skizzierten allgemeinen Ideen in speziellen Fällen praktisch zu erproben, wollen wir zuvor

*) Diese allgemeine Methode zur Konstruktion von Rechentafeln ist zuerst von *Massau* angegeben in seiner Arbeit: Mémoire sur l'intégration graphique et ses applications, Annales de l'Association des Ingenieurs sortis des Écoles spéciales de Gand (1884) (Buch III, Kap. III, § 2).

noch wenige Worte einigen besonders einfachen Systemen cotierter Kurven widmen, zumal uns dadurch Gelegenheit geboten ist, zum ersten Male *Anwendung von den Anschauungen der projektiven Geometrie* zu machen.

a) Die Gleichung $U + \alpha V = 0$ mit dem Parameter α, wo U, V ganze lineare Funktionen von x, y seien, definiert ein *Büschel gerader Linien (System von Geraden ersten Grades). Auf einer beliebigen Parallelen g zu der Geraden des Büschels mit der Cote ∞ wird durch alle Geraden des Büschels eine reguläre Skala* (vgl. p. 9) *ausgeschnitten, wenn jedem Schnittpunkt die Cote der ihn verursachenden Geraden des Büschels zuerteilt wird.*

b) Die Gleichung $U + \alpha V + \alpha^2 W = 0$, wo U, V, W wieder ganze lineare Funktionen von x, y sind, definiert das System der Tangenten eines Kegelschnittes (*System von Geraden zweiten Grades*). Letzterer selbst wird als Enveloppe durch die Gleichung $V^2 - 4UW = 0$ bestimmt. *Die mit entsprechenden Coten versehenen Schnittpunkte irgend einer Geraden des Systems mit allen übrigen Geraden bilden eine lineare Skala* (vgl. p. 9). Dieser letzte Satz enthält offenbar nichts anderes als die projektive Erzeugung des Kegelschnittes als Umhüllungsgebilde der Verbindungsgeraden entsprechender Punkte projektiver Punktreihen.

Dafs diese angeführten Sätze umgekehrt dazu dienen, die Systeme cotierter Geraden des ersten oder zweiten Grades leicht zu konstruieren, liegt auf der Hand, doch wollen wir darauf nicht näher eingehen.

Wir wollen nun zu den in Aussicht gestellten speziellen Anwendungen unserer allgemeinen Betrachtungen übergehen:

1. *Alle drei Kurvensysteme mögen aus Geraden bestehen.* Ihre oben allgemein mit $F_i(x, y, \alpha_i) = 0$ bezeichneten Gleichungen lauten dann, wenn wir an Stelle von $f_i(\alpha_i), \varphi_i(\alpha_i), \psi_i(\alpha_i)$ einfach f_i, φ_i, ψ_i setzen — eine Abkürzung, die wir auch späterhin beibehalten wollen —:

$$x f_i + y \varphi_i + \psi_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{d. h.}$$

sie sind linear in x, y. Durch Elimination von x, y ergiebt sich die oben mit $f(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ bezeichnete Gleichung in der speziellen Form:

$$| f_i \; \varphi_i \; \psi_i | = 0,$$

wo der symbolische Ausdruck der linken Seite, wie auch später, als Abkürzung für die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_1 & \varphi_1 & \psi_1 \\ f_2 & \varphi_2 & \psi_2 \\ f_3 & \varphi_3 & \psi_3 \end{vmatrix}$$

eingeführt ist.

Soll eine gegebene Gleichung zwischen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ *durch eine Rechentafel darstellbar sein, die in der angegebenen Weise aus drei Systemen gerader Linien besteht, so ist hierzu notwendig und hinreichend, dafs die Gleichung in die letztangeführte Form übergeführt werden kann.**)

Diese Gleichungsform umfafst in der That eine grofse Fülle sich in der Praxis darbietender Fälle. Spezielle Beispiele werden wir auch in mancher unserer früheren Figuren auf den ersten Blick erkennen. Wir wollen uns begnügen, nur die folgende Gleichung anzugeben, welche man leicht als hierher gehörenden speziellen Fall erkennt:

$$(m_1\alpha_1 + n_1)(m_2\alpha_2 + n_2)\cdot f_3 + (p_1\alpha_1 + q_1)(p_2\alpha_2 + q_2)\cdot \varphi_3 \\ + (r_1\alpha_1 + s_1)(r_2\alpha_2 + s_2)\cdot \psi_3 = 0.$$

Man kann es so einrichten, dafs von den drei Systemen cotierter Geraden, welche die zugehörige Rechentafel bilden, zwei vom zweiten Grade sind und überdies denselben Kegelschnitt als Enveloppe haben, während natürlich das dritte System den unbestimmten Funktionen f_3, φ_3, ψ_3 entsprechend noch ganz allgemein ist (vgl. **O.** p. 101).

Einen Fortschritt von praktischer Bedeutung bildet jetzt die Erkenntnis, dafs wir auf jede Rechentafel mit Kurvenkreuzung eine geeignete Punkttransformation anwenden können, wobei wir nur dafür sorgen müssen, dafs auch den neuen Kurven wieder die entsprechenden Coten hinzugefügt werden. Doch wollen wir uns darauf beschränken, nur wenige Worte der *Anwendung der projektiven Punkttransformationen* auf unsere aus drei Systemen gerader Linien bestehende Rechentafeln zu widmen. Diese Transformationen lassen ja die charakteristische Eigenart der Rechentafeln unverändert. Bezeichnen wir mit $\lambda_\varkappa$, $\mu_\varkappa$, $\nu_\varkappa$ für $\varkappa = 1, 2, 3$ beliebige Zahlen mit nicht verschwindender Determinante $\varDelta = |\lambda_\varkappa\, \mu_\varkappa\, \nu_\varkappa|$, so kommt die projektive Transformation darauf hinaus, dafs an Stelle der oben genannten Gleichungen unserer Geradensysteme jetzt die folgenden treten:

$$x\cdot(\lambda_1 f_i + \mu_1\varphi_i + \nu_1\psi_i) + y(\lambda_2 f_i + \mu_2\varphi_i + \nu_2\psi_i) + (\lambda_3 f_i + \mu_3\varphi_i + \nu_3\psi_i) = 0$$

für $i = 1, 2, 3$, aus denen durch Elimination von x, y sich:

$$|\,f_i\ \varphi_i\ \psi_i\,|\cdot\varDelta = 0$$

ergiebt. *Die genannten drei Gleichungen definieren also die allgemeinste Rechentafel mit drei Systemen gerader Linien, welche die Gleichung* $|f_i\,\varphi_i\,\psi_i| = 0$ *darstellt.* Den wichtigsten Vorteil einer solchen Transformation zeigt die folgende Bemerkung: Es seien a_1, b_1 bez. a_2, b_2 die in

*) Dieses Resultat ist zuerst von *Massau* in der citierten Arbeit angegeben worden.

Betracht kommenden Grenzen der Variablen α_1 und α_2, und die ihnen entsprechenden Geraden der Systeme (α_1) und (α_2) mögen ein gewöhnliches Viereck bilden, dessen Inneres allein für die Rechentafel in Betracht kommt. Durch Anwendung einer bestimmten projektiven Transformation ist es dann ersichtlich stets möglich, die Rechentafel in das Innere eines gegebenen Rechtecks zu verlegen und damit eine weit bequemere Anordnung zu gewinnen.

2. *Alle drei Kurvensysteme mögen aus Kreisen bestehen.* Wir gehen aus von den Gleichungen der drei Systeme:

$$a_i(x^2+y^2)+xf_i+y\varphi_i+\psi_i=0$$

für $i=1, 2, 3$, wo mit a_i drei Konstante bezeichnet sind, die im allgemeinen Falle gleich 1 gewählt werden können, die wir aber beibehalten, um die eine oder andere von ihnen auch verschwinden und damit an Stelle des zugehörigen Kreissystemes ein Geradensystem treten zu lassen. Als Eliminationsresultat von x, y ergiebt sich:

$$|a_i\,\varphi_i\,\psi_i|^2+|f_i\,a_i\,\psi_i|^2+|f_i\,\varphi_i\,a_i|\cdot|f_i\,\varphi_i\,\psi_i|=0$$

als die allgemeinste und gewifs auch recht umfassende Gleichungsform, die durch eine aus drei Kreissystemen zusammengesetzte Rechentafel darstellbar ist. Treten nun an Stelle der beiden ersten Kreissysteme Geradensysteme, so haben wir $a_1=a_2=0$ zu setzen. Die letzte Gleichung geht dann über in:

$$a_3\cdot[\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1)^2+(\psi_1 f_2-\psi_2 f_1)^2]+(f_1\varphi_2-f_2\varphi_1)\cdot|f_i\,\varphi_i\,\psi_i|=0.$$

Besteht auch das dritte Kurvensystem aus Geraden, d. h. ist auch $a_3=0$, so erhalten wir wieder die uns schon bekannte Gleichungsform $|f_i\,\varphi_i\,\psi_i|=0$.

Ein Beispiel einer Rechentafel mit zwei Geraden- und einem Kreissysteme bietet die Gleichung:

$$k^2+kp\sin\varphi\cos\varphi-\frac{p}{3}\cos^2\varphi=0$$

oder:

$$k^2(1+\operatorname{tang}^2\varphi)+p\left(k\operatorname{tang}\varphi-\frac{1}{3}\right)=0.$$

In ihr bezeichnet k das Verhältnis der Basis zur Höhe einer Mauer von rechteckigem Querschnitt, die eine unter dem Böschungswinkel φ abfallende Erdmasse stützt, während p das Verhältnis der spezifischen Gewichte der Erdmasse und des Mauerwerks angiebt. Die oben angeführte für zwei Geraden- und eine Kreisschar gültige allgemeine Gleichungsform geht in die letzte Gleichung über, wenn wir setzen:

$$\begin{array}{lll} f_1=\operatorname{tang}\varphi, & f_2=-\frac{1}{3}, & f_3=-l\cdot p, \\ \varphi_1=-1\ , & \varphi_2=k\ , & \varphi_3=0\ , \\ \psi_1=0\ , & \psi_2=lk^2\ , & \psi_3=0\ , \end{array}$$

wo l einen Modul bezeichnet, der in der Figur gleich 10 cm gewählt ist. Die drei Kurvenscharen sind dementsprechend definiert durch die Gleichungen:

$$x \operatorname{tang} \varphi - y = 0,$$
$$-\frac{x}{3} + ky + lk^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - lpx = 0.$$

Die erste Kurvenschar (φ) besteht hiernach aus Geraden durch den Koordinatenanfangspunkt (Fig. 10, **O.** p. 117), deren einzelne unter dem

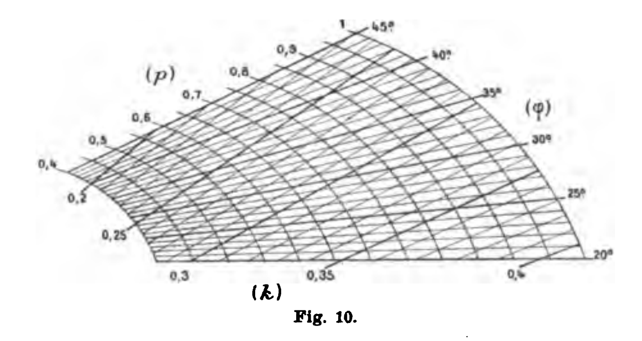


Fig. 10.

Winkel φ gegen die x-Achse geneigt ist. Die zweite (k) bildet ein Geradensystem zweiten Grades, wie wir es p. 20 erklärt haben, und umhüllt eine Parabel. Da dessen unendlich ferne Tangente dem Werte $k = \infty$ entspricht, so schneidet dem Satze p. 20 entsprechend diese Geradenschar auf jeder einzelnen ihrer Geraden eine r e g u l ä r e Skala aus. Die dritte Kurvenschar (p) endlich umfaſst die Kreise vom Radius $\frac{lp}{2}$, welche die y-Achse im Anfangspunkt berühren.

§ 4.

Collineare Rechentafeln für Gleichungen zwischen drei Variablen.

Nunmehr verlassen wir die Rechentafeln mit Kurvenkreuzung und wenden uns zur Betrachtung der zweiten Methode, die uns *die collinearen Rechentafeln* für Gleichungen zwischen drei Variablen liefert. Schon früher ist der Gedanke zum Ausdruck gebracht, wie überaus vorteilhaft es ist, an Stelle von cotierten Kurvenscharen cotierte Punktreihen zu benutzen. Ich erinnere in dieser Hinsicht z. B. an die p. 18 besprochenen hexagonalen Rechentafeln. Jetzt gilt es eine weit allgemeinere und noch zweckmäſsigere Methode zu entwickeln, die den gleichen Vorteil darbietet. Wir knüpfen unsere Betrachtungen an die aus drei

Systemen gerader Linien bestehenden Rechentafeln an, welche für Gleichungen der Form $|f_i \varphi_i \psi_i| = 0$ gelten. Der neu hinzutretende Gedanke*) ist einfach der, *dafs wir eine solche Rechentafel einer dualistischen oder reciproken Transformation unterwerfen*, wie eine solche im speziellen Falle beispielweise die Polarenverwandtschaft in Bezug auf einen Kegelschnitt darbietet (Prinzip der Dualität der projektiven Geometrie). Wenn wir noch die Cote jeder Geraden dem letzterer entsprechenden Punkte zufügen, so treten also an Stelle der drei Systeme cotierter Geraden drei Kurven cotierter Punkte, den Enveloppen der Geradensysteme dual entsprechend (Fig. 11, O. p. 125). Die Anwendung der so erhaltenen neuen Rechentafel, die ich als „collineare Rechentafel" zu bezeichnen vorschlage, wird hinlänglich durch folgenden Satz charakterisiert: *Die Gerade, welche die den gegebenen Werten α_1 und α_2 entsprechenden Punkte der Punktreihen (α_1), (α_2) oder der krummlinigen Punktskalen (α_1), (α_2) (échelles curvilignes), wie wir auch sagen können, verbindet, schneidet die dritte Skala (α_3) in einem Punkte, dessen Cote α_3 die gesuchte Gröfse ergiebt.*

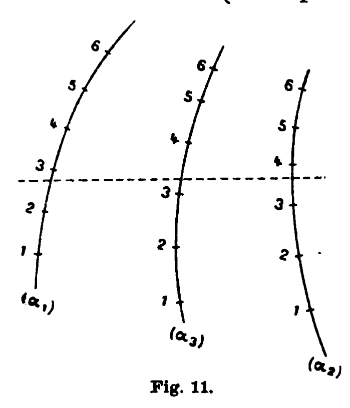


Fig. 11.

Schon hier möchte ich erwähnen, dafs die Anwendung dieser neuen Methode sich nicht auf andere Gleichungen als solche der Form $|f_i \varphi_i \psi_i| = 0$ zweckmäfsig ausdehnen läfst, was auf den ersten Blick überraschend erscheinen mag. Doch ergeben sich ja im allgemeinsten Falle dreier Systeme krummliniger Kurven nach Ausführung einer dualistischen Transformation wieder drei Systeme krummliniger Kurven; an die Stelle der bisherigen einfachen Bedingung, dafs die je drei zusammengehörenden Werten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ entsprechenden Kurven durch einen Punkt gehen, tritt aber jetzt die ungleich kompliziertere, dafs je drei solche Kurven eine gemeinsame Tangente besitzen. Wir werden uns daher im folgenden durchaus auf den Fall der angeführten Gleichungsform $|f_i \varphi_i \psi_i| = 0$ beschränken.

Ist es nun nötig, zunächst eine aus drei Systemen gerader Linien bestehende Rechentafel zu zeichnen und diese dann dualistisch umzuformen? Gewifs nicht, vielmehr wird man sogleich die collineare Rechentafel zu entwerfen suchen müssen. Man bedient sich nach *d'Ocagne* hierzu bequem des Systems der sogenannten Parallelkoordinaten u, v, dem zwei Gerade als uv-Achsen mit den Anfangspunkten A und B zu

*) Das Verdienst, ihn zuerst ausgesprochen zu haben, gebührt *d'Ocagne* selbst. Vgl. indes in der p. 64 genannten Arbeit von Herrn *Mehmke* die Anm. p. 58.

Grunde liegen.*) *Als Parallelkoordinaten u, v einer Geraden g sind die mit Vorzeichen zu nehmenden Strecken zu verstehen, welche jene auf den Achsen abschneidet* (Fig. 12). Wer mit den Anschauungen der Dreieckskoordinaten vertraut ist, wird in dem Parallelkoordinatensystem leicht einen speziellen Fall von solchen erkennen. Die Gleichung ersten Grades: $au + bv + c = 0$ stellt dann in unserem Linienkoordinatensystem einen Punkt dar, dessen Lage nach dem Vorstehenden auch leicht zu konstruieren ist. Führen wir zugleich noch ein cartesisches Koordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt O der Mittelpunkt von AB und dessen ξ- und η-Achsen die Gerade OB und die Parallele durch O zu den uv-Achsen sind, so ist in demselben der durch die letzte Gleichung definierte Punkt auch durch die Koordinaten bestimmt:

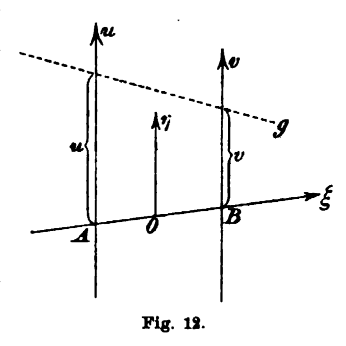


Fig. 12.

$$\xi = \delta \cdot \frac{b-a}{b+a}, \quad \eta = -\frac{c}{b+a},$$

wo $\delta = OB$ ist.

Übrigens übertragen sich alle unsere Bemerkungen, die wir oben für Punktkoordinaten (vgl. p. 20) gemacht haben, nun analog auch auf diese Linienkoordinaten. Sind z. B. die Koefficienten der Gleichung $au + bv + c = 0$ Funktionen eines Parameters α, so stellt diese Gleichung eine im allgemeinen krummlinige Skala cotierter Punkte dar, deren geometrischen Ort man durch Elimination von α aus der gegebenen Gleichung und ihrer Ableitung nach α erhält.

Ein System cotierter Punkte ***ersten*** *Grades oder eine „lineare Punktskala“* (vgl. p. 9) insbesondere ist definiert durch die Gleichung $U + \alpha V = 0$, wo U, V ganze lineare Funktionen von u, v sind. Der geometrische Ort oder der Träger der Punkte ist die Gerade, welche die Punkte $U = 0$ und $V = 0$ verbindet.

Ein System cotierter Punkte zweiten Grades ferner ist definiert durch $U + \alpha V + \alpha^2 W = 0$, wo U, V, W wieder ganze, lineare Funktionen von u, v sind. Das System liegt wieder auf einem Kegelschnitt, dessen

*) Die Parallelkoordinaten sind eingehend behandelt von *d'Ocagne* in seiner Abhandlung: Coordonnées parallèles et axiales, Nouvelles Annales, 3. Sér., Bd. III, 1884, wieder abgedruckt in besonderer Schrift, Paris 1885, und schon vorher von *K. Schwering* im Jahresbericht des Westfälischen Provinzialvereins p. 149, 1874 und sodann in der Schrift: Theorie und Anwendung der Linienkoordinaten, Leipzig 1884. Neuerdings hat Herr *Rudio* in der Herrn Moritz Cantor gewidmeten Festschrift (Leipzig 1899, p. 386 ff.) nachgewiesen, dafs lange vor d'Ocagne und Schwering die Parallelkoordinaten von *Unverzagt* planmäfsig angewendet sind.

Gleichung $V^2 - 4UW = 0$ ist. *Die Geraden, welche alle Punkte des Systems mit einem beliebigen unter ihnen verbinden, bilden ein lineares Büschel cotierter Geraden, wenn wir jeder Geraden die Cote des zugehörigen Punktes geben*, mit anderen Worten: *Die centrale Projektion des Punktsystems* (α) *von einem ihrer Punkte auf eine beliebige Gerade bildet eine lineare Punktskala.* Aus diesen Sätzen folgen wieder sehr einfache Regeln für die Konstruktion solcher Punktsysteme.

Nun ist auch mit wenigen Worten gesagt, wie wir die collinearen Rechentafeln für die Gleichungsform $|f_i \varphi_i \psi_i| = 0$ direkt zu konstruieren haben. Wir haben ganz analog wie oben von den drei Gleichungen auszugehen:

$$u f_i + v \varphi_i + \psi_i = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3$$

und die durch sie definierten Punktskalen zu zeichnen. In cartesischen Koordinaten sind aber die Punktskalen nach Obigem durch die Gleichungen mit dem Parameter α_i bestimmt:

$$\xi = \delta \cdot \frac{\varphi_i - f_i}{\varphi_i + f_i}, \quad \eta = -\frac{\psi_i}{\varphi_i + f_i}.$$

Bemerken will ich nur noch, dafs man auf eine gezeichnet vorliegende collineare Rechentafel wieder eine geeignete *projektive Transformation* anwenden kann, um ihr vielleicht eine bequemere Form zu geben (vgl. p. 21).

Wir gehen nunmehr dazu über, vier spezielle Fälle collinearer Rechentafeln näher zu besprechen und durch Beispiele zu erläutern.

I. Rechentafeln mit drei Parallelen als Träger der Punktskalen.

Der allgemeinste Typus der hierher gehörenden Gleichungen ist: $f_1 + f_2 + f_3 = 0$, derselbe, der auch durch hexagonale Rechentafeln darstellbar ist (vgl. p. 18). Es wird gesetzt:

$$u = l_1 f_1, \quad v = l_2 f_2,$$

woraus folgt:

$$\frac{u}{l_1} + \frac{v}{l_2} + f_3 = 0.$$

Diese letzte Gleichung bestimmt in dem oben definierten cartesischen Hülfskoordinatensystem die Punkte:

$$\xi = \delta \cdot \frac{l_1 - l_2}{l_1 + l_2}, \quad \eta = -\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2} \cdot f_3.$$

Während daher die u- und v-Achsen unmittelbar als Träger der Funktionsskalen (α_1) *und* (α_2) *mit den Moduln* l_1 *und* l_2 *gewählt sind, wird der Träger der Funktionsskala* (α_3) *durch die Parallele zu ihnen geliefert, welche die Strecke* AB *in einem Punkte* C *so teilt, dafs* $\frac{AC}{CB} = \frac{l_1}{l_2}$ *ist.* Und zwar ist auf dieser mit positiver Richtung versehenen Parallelen

einfach von C aus die Funktionsskala $w = l_3 f_3$ zu konstruieren, wo $l_3 = -\frac{l_1 l_2}{l_1 + l_2}$ oder $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = 0$ ist.

Als Anwendung dieser Betrachtungen sei ein Beispiel aus der Militärwissenschaft gewählt. Es bezeichne V die Anzahl der von einem Truppenkörper in einer Minute zurückgelegten Meter, T die ebenfalls in Minuten ausgedrückte Zeit des Marsches, E den zurückgelegten Weg, in Hektometern gemessen. Dann gilt einfach:

$$E = \frac{V \cdot T}{100} \quad \text{oder} \quad \log V + \log T - \log E - 2 = 0,$$

worin wir den obigen Gleichungstypus erkennen. Ohne darauf einzugehen, wie nun die nebenstehende Rechentafel (Fig. 13, O. p. 156) im einzelnen

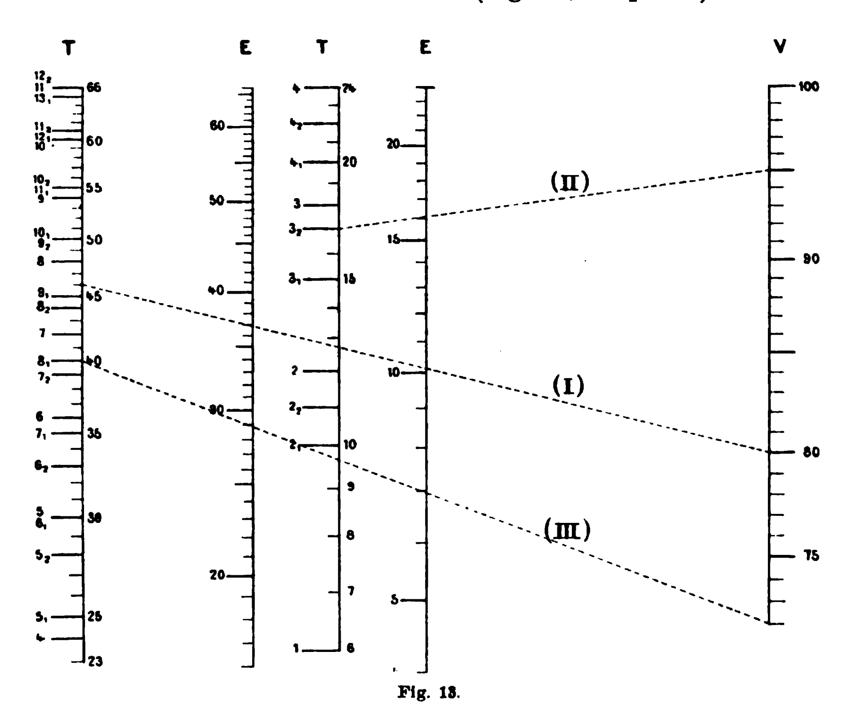


Fig. 13.

zu konstruieren ist, wollen wir uns begnügen, ihre Anwendung kurz zu erläutern. Die Skalen für die Variablen T und E sind aus Zweckmäſsigkeitsgründen je in zwei Teile zerlegt; es bilden die beiden links stehenden Skalen und ebenso die beiden dann folgenden Skalen zusammen mit der Skala (V) gleichsam je eine Rechentafel. Auf der Skala (T) gelten für den bisher beschriebenen Fall die rechts stehenden Ziffern. Wird aber im Gegensatz zu unserer obigen Festsetzung die Zeit des Marsches in Stunden und der zurückgelegte Weg in Kilometern

angegeben, so gelten die links stehenden Ziffern der Skala (T) ohne unteren Index. Die Ziffern mit dem unteren Index 1 oder 2 endlich gelten dann, wenn überdies für jede Stunde oder je 2 Stunden eine Rast von 10 Minuten hinzukommt. Die gestrichelten Linien deuten einige Beispiele an, z. B. gilt für die Linie (II) $T = 17$ Min., $E = 16,1$ hm, $V = 95$ m.

II. Rechentafeln mit zwei Parallelen und einer sie schneidenden Geraden als Skalenträger.

Die Träger der drei Skalen kann man am einfachsten als die uv-Achsen und die ihre Nullpunkte verbindende Gerade AB wählen, eine Annahme, in die jede andere zulässige Festsetzung sich durch projektive Transformation überführen läfst. Die Skalen selbst sind dann definiert durch: $u = l_1 f_1$, $v = l_2 f_2$ und $f_3 \frac{u}{l_1} + \frac{v}{l_2} = 0$, so dafs wir als allgemeinste Gleichungsform für solche Rechentafeln $f_1 f_3 + f_2 = 0$ bekommen (vgl. p. 15).*) Die Skala (α_3) kann übrigens auch wieder in dem cartesischen Koordinatensystem durch: $\xi = \delta \cdot \frac{l_1 - l_2 f_3}{l_1 + l_2 f_3}$, $\eta = 0$ definiert werden. Wir fügen ein Beispiel aus der Physik hinzu.

Bezeichnet ε die in mm angegebene Korrektion, welche von dem bei t^0 C in mm Quecksilber abgelesenen Barometerstande p abzuziehen ist, um ihn auf 0^0 C zu reducieren, so gilt die Beziehung: $\varepsilon = 0{,}00016\, pt$. Die Skalen für die Veränderlichen p, ε, t sind in nebenstehender, in verkleinertem Mafsstabe wiedergegebenen Rechentafel natürlich nur so weit

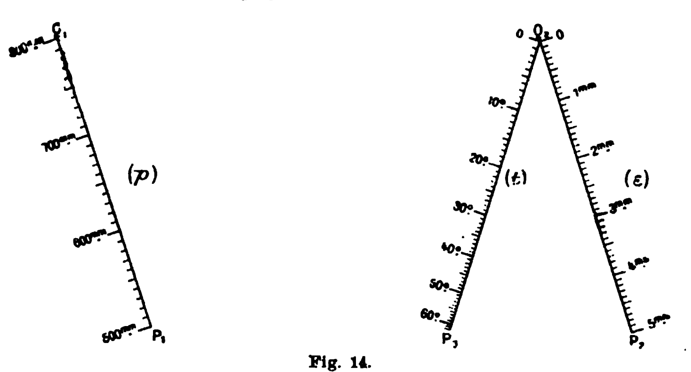


Fig. 14.

aufgetragen, als es für die praktische Verwendung nötig ist (Fig. 14, O. p. 174). Der Gebrauch der Tafel sei durch folgendes Zahlenbeispiel erläutert. Ist etwa $p = 640^{mm}$ und $t = 25^0$ gegeben, so trifft die Ver-

*) Durch Einführung einer neuen Bezeichnung kann man diese Gleichungsform auch in die folgende überführen: $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 1$, die durch Logarithmieren sich mit der unter I besprochenen Gleichungsform identificieren läfst.

bindungslinie der entsprechend bezeichneten Punkte der Skalen (p) und (t) die Skala (ε) in dem mit dem gesuchten Werte $2{,}56^{\mathrm{mm}}$ bezeichneten Punkte.

III. Rechentafeln mit drei nicht parallelen Geraden als Skalenträger.

Natürlich ist dieser Rechentafeltypus mit den beiden vorhergehenden projektiv verwandt, so dafs auch dieselben Gleichungsformen hier wie dort in Betracht kommen. Nur Gründe der zweckmäfsigeren Anordnung können daher mafsgebend sein, diesen allgemeineren Typus vorzuziehen, worauf wir sogleich noch zurückkommen. Wir haben dem Gesagten gemäfs auch die zwei Fälle zu unterscheiden, dafs die drei Skalenträger denselben Punkt gemeinsam haben oder nicht.

1. Im *ersten Falle* mögen als Träger der Skalen (α_1) und (α_2) einfach die x- und y-Achsen eines schiefwinkligen Koordinatensystems mit dem Winkel ω und die Halbierungslinie des letzteren, die z-Achse mit geeignet gewählter positiver Richtung, als der Träger der Skala (α_3) gelten, d. h. es sei

$$x = l_1 \varphi_1(\alpha_1),$$
$$y = l_2 \varphi_2(\alpha_2),$$
$$z = l_3 \varphi_3(\alpha_3)$$

gesetzt, so dafs sich für den Punkt der z-Achse mit der Cote α_3 die Koordinaten

$$x = y = -\frac{l_3 \varphi_3}{2 \cos \frac{\omega}{2}}$$

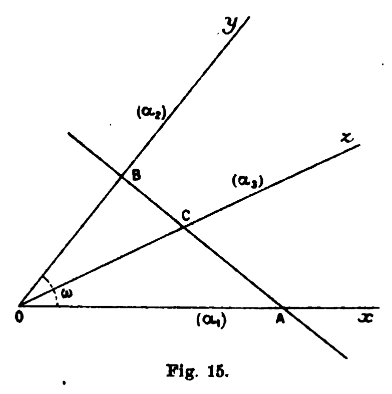


Fig. 15.

ergeben (Fig. 15, **O.** p. 175). Diese Annahmen beeinträchtigen offenbar dem Wesen der Sache nach die Allgemeingültigkeit unserer Betrachtung nicht. Da nun die Gerade durch die Punkte mit den Coten α_1 und α_2 auf den xy-Achsen, deren Gleichung $\frac{x}{l_1 \varphi_1} + \frac{y}{l_2 \varphi_2} = 1$ lautet, auch durch den Punkt mit der Cote α_3 auf der z-Achse geht, so ergiebt sich als Gleichungsform zu einer solchen Rechentafel, wenn man noch $l_1 = l_2$ und $l_3 = 2 l_1 \cos \frac{\omega}{2}$ wählt,

$$\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{\varphi_3} = 0$$

oder $\frac{1}{\varphi_i} = f_i$ gesetzt:

$$f_1 + f_2 + f_3 = 0,$$

wie oben (p. 26). Doch der Vorteil dieser neuen Darstellungsart ist der, dafs

wir, wenn die letzte Gleichungsform gegeben ist, umgekehrt allgemeiner setzen können:

$$\varphi_1 = \frac{1}{h + kf_1}, \quad \varphi_2 = \frac{1}{h + kf_2}, \quad \varphi_3 = \frac{1}{2h + kf_3},$$

wo h und k beliebige Konstante sind, um zu der vorletzten Gleichungsform zu gelangen. Diese Bemerkung ist besonders dann von Wichtigkeit, wenn die eine oder andere Funktion f_i z. B. Werte von 0 bis ∞ annimmt; denn dann kann man es so einrichten, dafs die entsprechende Funktion φ_i zwischen *endlichen* Grenzen variiert. Die Anwendung des speziellen unter I besprochenen Rechentafeltypus wäre in solchem Falle eben nicht möglich.

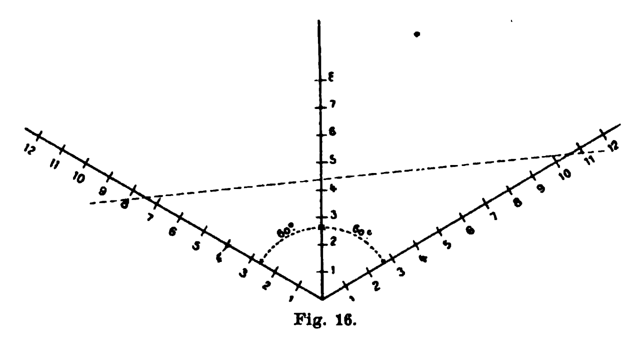


Fig. 16.

Ein Beispiel giebt die bereits oben mit anderer Bezeichnung (p. 17) benutzte Gleichung der Physik: $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_3}$. In der zugehörigen Figur (Fig. 16, **O.** p. 177) ist $\omega = 120^0$ gewählt, so dafs $l_1 = l_2 = l_3$ wird.

2. Im *zweiten Falle* werden also die drei Skalen (α_1), (α_2), (α_3) von dreien ein Dreieck UVW bildenden Geraden getragen. Möge eine be-

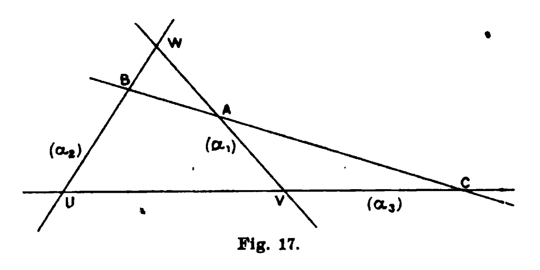


Fig. 17.

liebige Transversale die Dreiecksseiten in den Punkten A, B, C schneiden, dann gilt nach dem Satze des Menelaus:

$$\frac{VA}{AW} \cdot \frac{WB}{BU} \cdot \frac{UC}{CV} = -1$$

(Fig. 17, **O.** p. 180). Setzen wir nun:

$$\frac{VA}{AW} = -\varphi_1, \quad \frac{WB}{BU} = -\varphi_2, \quad \frac{UC}{CV} = -\varphi_3,$$

dann ergiebt sich wieder die früher in Nr. II erhaltene Gleichungsform: $\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 = 1$.*)

Es ist hier eine ähnliche Bemerkung wie vorhin zu machen. Wenn nämlich z. B. φ_3 von 0 bis 1 variiert, so würde sich entsprechend unseren Festsetzungen der Punkt C von U aus ins Unendliche bewegen. Setzt

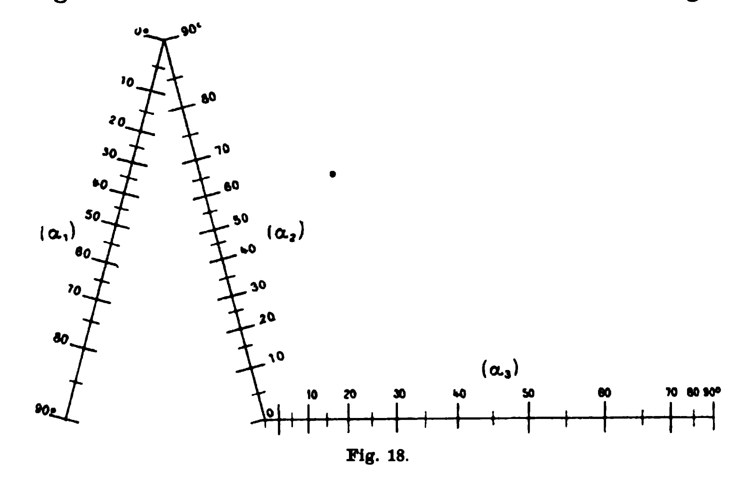


Fig. 18.

man in obige Gleichungen an Stelle von φ_1, φ_2, φ_3 indes wieder $k\varphi_1$, $k\varphi_2$, $\frac{1}{k^2}\varphi_3$, wo k konstant und gröfser als 1 sei, so ist hierdurch diesem Übelstande abgeholfen. Ein Beispiel ergiebt nebenstehende Rechentafel für die Gleichung $\operatorname{tang} \alpha_1 \cdot \operatorname{tang} \alpha_2 = \sin \alpha_3$ (Fig. 18, O. p. 181).

IV. Rechentafeln mit krummlinigen Skalenträgern.

Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dafs nur ein Skalenträger krummlinig ist. Als Träger der beiden geradlinigen Skalen seien die oben eingeführten uv-Achsen gewählt, so dafs wir von den Gleichungen auszugehen haben:

$$u = l_1 f_1, \quad v = l_2 f_2, \quad \frac{u}{l_1} f_3 + \frac{v}{l_2} \varphi_3 + \psi_3 = 0,$$

aus denen sich als die für solche Rechentafeln gültige Gleichungsform ergiebt:

$$f_1 f_3 + f_2 \varphi_3 + \psi_3 = 0.$$

Der spezielle Fall, dafs auch die dritte Skala geradlinig wird, ist bereits soeben behandelt. *Derselbe tritt stets dann und nur dann ein, wenn* $\psi_3 = a f_3 + b \varphi_3$ *ist, wo a und b beliebige Konstante sind.***)

*) Es sei zu erwähnen nicht unterlassen, dafs bereits *Möbius* gelegentlich diesen Rechentafeltypus vorgeschlagen hat, Ges. Werke Bd. IV, p. 620.

**) *d'Ocagne* nimmt nur den Fall aus, dafs etwa f_3, φ_3, ψ_3 gleichzeitig linear sind, was indes nicht genügt.

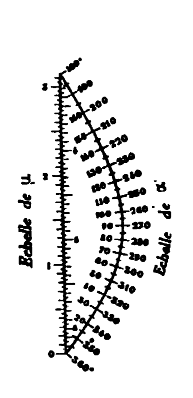
Als Beispiel sei die Keplersche Gleichung:

$$\alpha - e \sin \alpha = \mu$$

ausgewählt, wo μ die mittlere, α die excentrische Anomalie, beide in Bogenmafs gemessen, e die Excentricität einer Planetenbahn bedeutet. Die drei Skalen entsprechen den Gleichungen:

$$u = l_1 \mu, \quad v = l_2 e, \quad l_2 u + l_1 \sin \alpha \cdot v - l_1 l_2 \alpha = 0.$$

Ohne hier auf die zweckmäfsigste Konstruktionsart der nebenstehenden Rechentafel (Fig. 19, O. p. 195) einzugehen, sei nur bemerkt, dafs in den



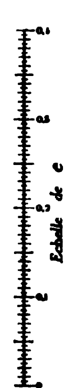


Fig. 19.

Skalen μ im Bogenmafs, α in Geraden angegeben ist und dafs ferner die links und andererseits die rechts stehenden Bezeichnungen der Skalen (μ) und (α) jedesmal zusammengehören, der Thatsache entsprechend, dafs α und μ gleichzeitig gröfser oder kleiner als π bezw. 180^0 sind.

§ 5.

Rechentafeln für Gleichungen zwischen vier oder mehr Variablen.

Was nun ferner die Gleichungen oder Gleichungssysteme mit mehr als drei Variablen betrifft, so möchte ich nicht ausführlich auf die Konstruktion der zugehörigen Rechentafeln eingehen. Vielmehr ziehe ich es vor, einzelne charakteristische Beispiele vorweg zu besprechen und im Anschlufs daran das Allgemeine der zu Grunde liegenden Methode anzugeben.

I. Vereinigte collineare Rechentafeln.

Die Differenz Z der in Meter ausgedrückten Meereshöhe zweier Orte ist durch die Formel gegeben:

$$Z = 16\,000 \cdot \left[1 + \frac{t + t'}{500}\right] \cdot \frac{h - h'}{h + h'},$$

wo h und t der in mm ausgedrückte Barometerstand und die Temperatur für die obere, h' und t' dieselben Gröfsen für die untere Station bezeichnen. Es sei nun $\frac{t+t'}{2} = \Theta$ und $h - h' = \varepsilon$, $\frac{h+h'}{2} = \mu$ gesetzt. Dann ergiebt sich:

$$\frac{Z}{\varepsilon} = \frac{8000 + 32\,\Theta}{\mu} = \alpha,$$

wo α die Niveaudifferenz für 1 mm Druckdifferenz bedeutet (Fig. 20, O. p. 229). Die beiden Gleichungen $\frac{Z}{\varepsilon} = \alpha$ und $\frac{8000 + 32\,\Theta}{\mu} = \alpha$ sind in der Figur nun in der Weise je durch eine Rechentafel nach der p. 28

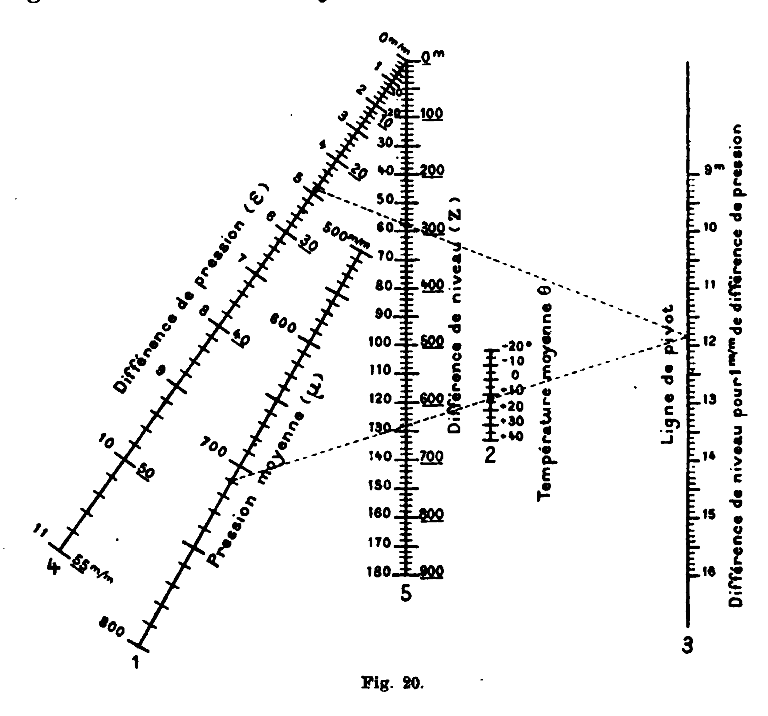


Fig. 20.

Nr. II beschriebenen Methode dargestellt, dafs die Skalen der Gröfse α für beide identisch sind. Diese Rechentafeln werden bez. durch die Skalen 1, 2, 3 und 3, 4, 5 gebildet. Die beiden Skalen auf jedem der Träger 4, 5 gelten für verschiedene Wahl der noch willkürlichen Moduln; die nicht unterstrichenen und die unterstrichenen Zahlen beider Skalen gehören allemal zusammen. Die Methode der Anwendung wird genügend durch das Zahlenbeispiel erläutert, dem die gestrichelten Geraden, die „Indices", entsprechen. Für $h = 722{,}6$ mm, $h' = 698{,}3$ mm, $t = 15{,}2^0$, $t' = 12^0$ oder für $\varepsilon = 24{,}3$ mm, $\mu = 710{,}4$ mm, $\Theta = 13{,}6^0$ ergiebt sich $Z = 288$ m. Die Skala 3 der Hülfsvariablen α wird als „Zapfenlinie" (ligne de pivot)

bezeichnet. Der Wert α braucht eben im einzelnen Falle ja gar nicht bekannt zu sein; vielmehr haben wir uns auf der Linie 3 an der bestimmten Stelle gleichsam einen Zapfen zu denken, an dem das Lineal anzulegen ist, um die Indices zu zeichnen.

Die Methode dieses Beispiels läfst sich nun in Rücksicht auf unsere Betrachtungen im vorigen Paragraphen unmittelbar auf Gleichungen von der Form übertragen:

$$f_1 + f_2 = f_3 + f_4,$$
$$f_1 f_2 = f_3 f_4,$$
$$f_1 f_2 + \varphi_2 = f_3 f_4 + \varphi_4,$$

ganz allgemein auf solche Gleichungen zwischen den vier Variablen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, die durch Elimination der Hülfsgröfse α aus den beiden Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & \varphi(\alpha) & \psi(\alpha) \\ f_1(\alpha_1) & \varphi_1(\alpha_1) & \psi_1(\alpha_1) \\ f_2(\alpha_2) & \varphi_2(\alpha_2) & \psi_2(\alpha_2) \end{vmatrix} = 0$$

und

$$\begin{vmatrix} f(\alpha) & \varphi(\alpha) & \psi(\alpha) \\ f_3(\alpha_3) & \varphi_3(\alpha_3) & \psi_3(\alpha_3) \\ f_4(\alpha_4) & \varphi_4(\alpha_4) & \psi_4(\alpha_4) \end{vmatrix} = 0$$

hervorgehen.

Die Rechentafel für eine solche Gleichung besteht eben aus zwei collinearen Rechentafeln, welche eine Skala, nämlich die der Hülfsgröfse α, gemeinsam haben.

II. Vereinigte cartesische Rechentafeln.

Es sei A der Betrag einer Geldanleihe, n die Zahl der zur Amortisation festgesetzten Jahre, t der Zinsfufs, a der jährlich zurückzuzahlende Betrag, so gilt die Formel:

$$\frac{a}{A} = \frac{\frac{t}{100}}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}}.$$

Diese Gleichung werde in die beiden folgenden zerlegt:

$$1) \quad x = \frac{a}{A}$$

und

$$2) \quad x = \frac{\frac{t}{100}}{1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{100}\right)^n}}.$$

Jede dieser Gleichungen ist durch eine gewöhnliche cartesische Rechentafel (p. 12) darstellbar und zwar so, dafs die auf der x-Achse aufgetragenen

Skalen für beide übereinstimmen. Die Rechentafel für die erste Gleichung besteht aus den beiden regulären Skalen auf den xy-Achsen, d. h. den cotierten Geradenscharen, die bez. zur y- oder x-Achse parallel sind, den Gleichungen $x = \frac{a}{A} = a_1$, $y = a \cdot l_1$ entsprechend (Fig. 21, **O.** p. 306) —

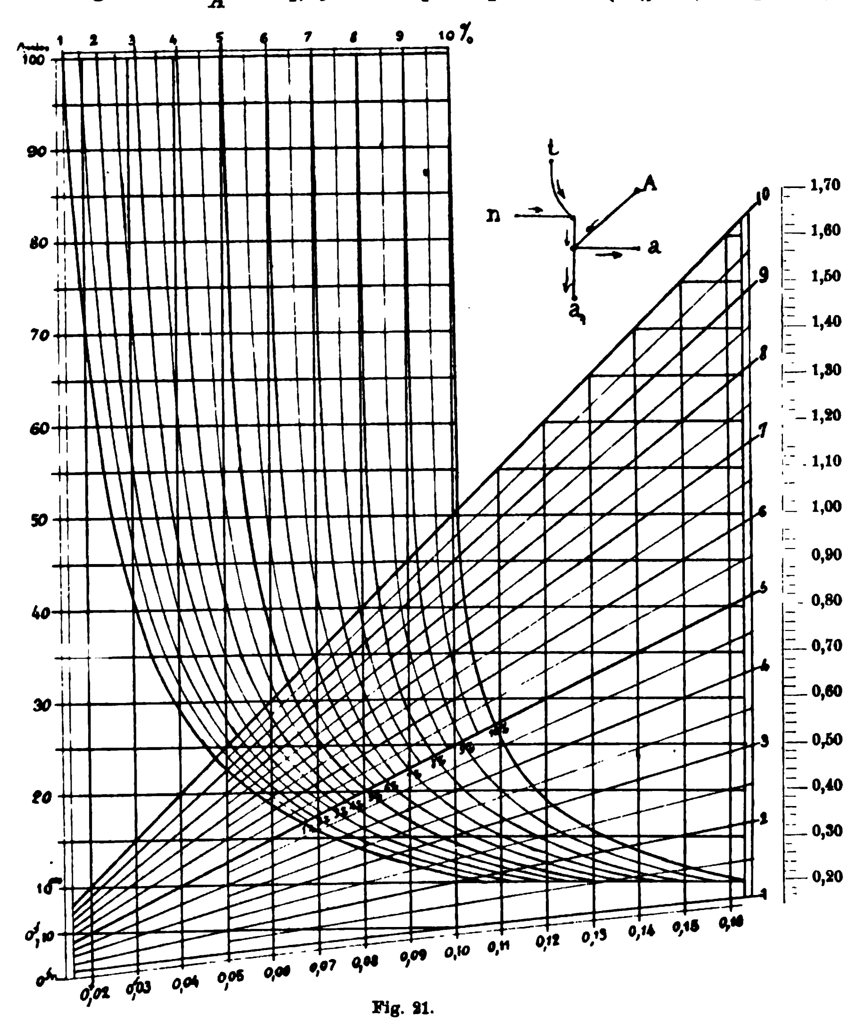


Fig. 21.

diese Skalen sehen wir in der Figur auf die untere Begrenzungsgerade und auf die rechts stehende Gerade übertragen —, sodann aus dem cotierten Geradenbüschel (A) durch den Koordinatenanfangspunkt, welches durch die Gleichung $y = Ax \cdot l_1$ definiert ist. Die Rechentafel für die zweite Gleichung besteht den Gleichungen $x = \frac{a}{A} = a_1$ und $y = n \cdot l_2$ entsprechend ebenfalls aus zwei regulären Skalen auf den xy-Achsen,

deren erste schon der ersten Rechentafel angehört, während die zweite auf der linken Begrenzungsgeraden aufgetragen ist, und aus der Schar cotierter Kurven (t), die durch die Gleichung:

$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^y=\left(\frac{x}{x-\frac{t}{100}}\right)^{h_2}$$

definiert sind. Die Art der Anwendung der zu einer einzigen vereinigten Rechentafeln giebt das Schema rechts oben in der Figur. Gegebenen Zahlenwerten t, n entspricht als Schnitt der zugehörigen Kurven ein bestimmter Punkt der Ebene, dessen Abscisse den Wert a_1 liefert. Ist dann auch für A ein bestimmter Zahlenwert gegeben, so bestimmen auch die cotierten Kurven für die Werte a_1 und A einen Punkt der Ebene, dessen Ordinate auf der Skala (a) abgelesen den gesuchten Wert a ergiebt.

Die diesem Beispiel zu Grunde liegende allgemeine Methode läfst sich jetzt mit wenigen Worten aussprechen. *Ist eben die Funktion* $F(\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2) = 0$ *durch Elimination der Variablen* γ *aus den zwei Gleichungen erhalten:*

$$\Phi_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma) = 0 \quad \textit{und} \quad \Phi_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma),$$

so hat man jede der letzten Gleichungen für sich durch eine cartesische Rechentafel (mit oder ohne Anamorphose) zu repräsentieren, jedoch so, dafs die z. B. auf der x*-Achse aufgetragenen Skalen für die Variable* γ *in beiden Rechentafeln gleich sind.*

III. Allgemeine Methode der Rechentafeln mit „binären" Skalen.

In ganz analoger Weise läfst sich diese Methode auch auf den Typus der hexagonalen Rechentafeln (p. 18) übertragen. Als Beispiel bietet sich die Formel der Zinseszinsrechnung dar:

$$A = a\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

oder

$$\log A = \log a + n \cdot \log\left(1+\frac{r}{100}\right),$$

wo a das angelegte Kapital, r den Zinsfufs, n die Zahl der Jahre und A das Endkapital bedeutet. Auf den y- und z-Achsen des zu Grunde liegenden hexagonalen Koordinatensystems seien in gewohnter Weise die durch die Gleichungen $y = l \cdot \log A$ und $z = l \cdot \log a$ bestimmten (logarithmischen) Skalen aufgetragen (Fig. 22, O. p. 314). (Die in der Figur den betreffenden Skalen beigefügten Ziffern sind mit 10^4 multipliciert zu denken.) Auf der dritten, der x-Achse, wird eine sogenannte *„binäre Skala"* *) für die Gesamtheit der Werte n, r aufgetragen, und zwar folgendermafsen. Die

*) Die erste systematische Anwendung der „binären Skala" ist von *Lallemand* gemacht worden (vgl. O. p. 297 Anm.).

x-Achse und eine zu ihr senkrechte y'-Achse zu Grunde legend gehen wir aus von den Gleichungen:

$$y' = l \cdot \log\left(1 + \frac{r}{100}\right), \quad \frac{x}{y'} = n,$$

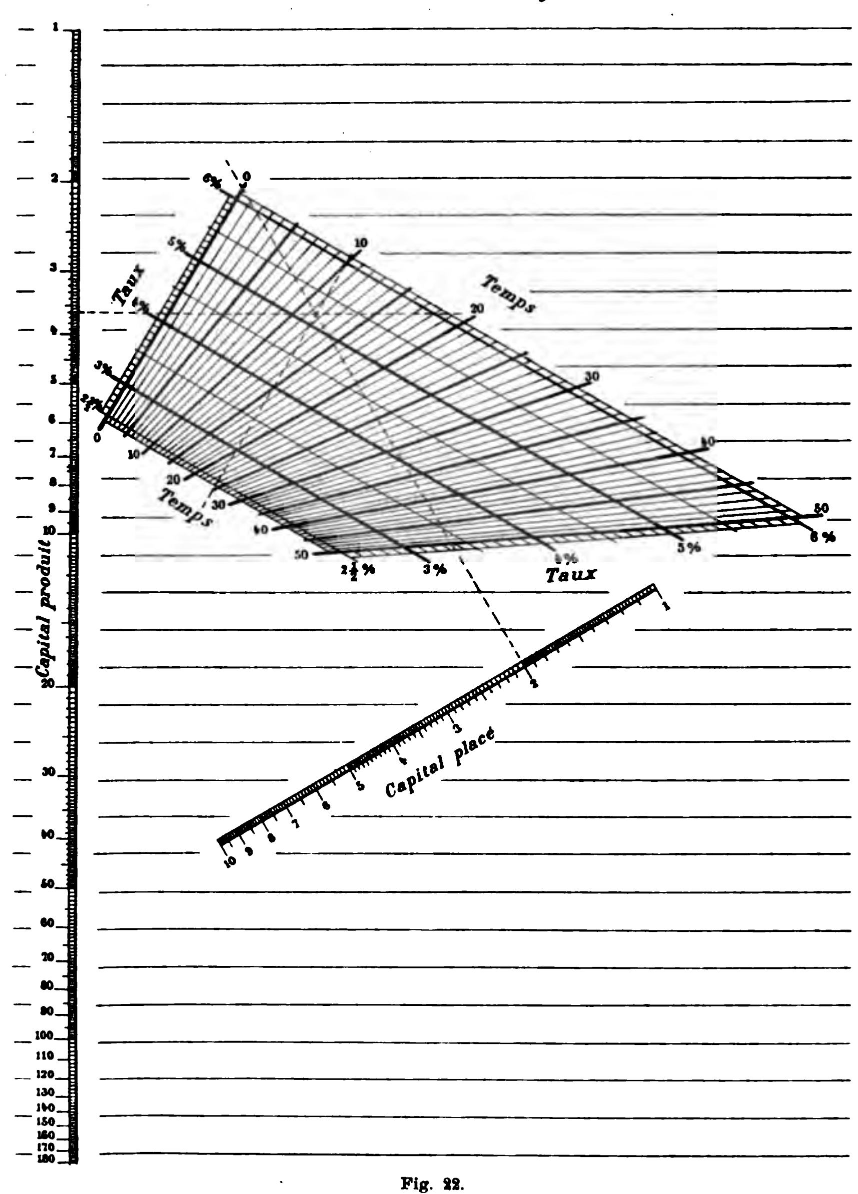


Fig. 22.

welche zwei Scharen cotierter Geraden definieren, deren erste aus Parallelen zur x-Achse, deren zweite aus Strahlen durch den Koordinatenanfangs-

punkt besteht. Die Schnittpunkte „mit der Doppelcote r, n“ je einer Geraden der einen und anderen Schar sind dann senkrecht auf die x-Achse projiciert zu denken, und der Projektion ist die Doppelcote des Schnittpunktes zu geben. (Zum Verständnis der Figur sei daran erinnert, daſs man jede der Skalen auf den xyz-Achsen ohne weiteres in einer zu ihr senkrechten Richtung verschieben kann, um etwa eine zweckmäſsigere Anordnung des Ganzen zu erhalten.)

Ein spezielles Zahlenbeispiel wird die Anwendung dieser Rechentafel vollends klarlegen. Es sei gegeben: $a = 20\,000$, $r = 4$, $n = 15$. Man lege durch den Schnittpunkt der durch die gegebenen Werte n, r bestimmten Geraden das Lot zur x-Achse und schneide dieses mit demjenigen Lote, das im Punkte mit der gegebenen Cote 2 auf der z-Achse errichtet ist. Das Lot von dem erhaltenen Schnittpunkt auf die y-Achse endlich trifft diese in dem Punkte, dessen Cote 3,6 den gesuchten Wert $A = 36\,000$ liefert.

Man bemerkt sofort die Verallgemeinerung, deren die an diesem Beispiel beschriebene Methode fähig ist. Man kann ja in analoger Weise wie auf der x-Achse auch auf den y- und z-Achsen „binäre Skalen“ auf-

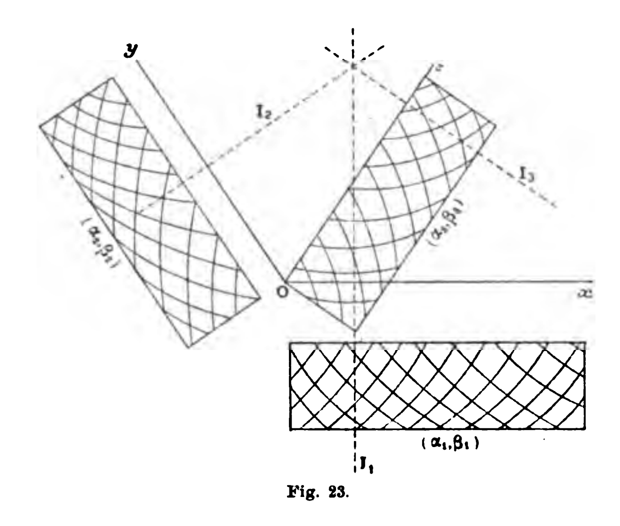


Fig. 23.

getragen denken, wie es schematisch die Fig. 23 (**O.** p. 312) andeutet. In solcher Weise ist man in den Stand gesetzt, Rechentafeln für Gleichungen der Form:

$$f_1(\alpha_1, \beta_1) + f_2(\alpha_2, \beta_2) + f_3(\alpha_3, \beta_3) = 0$$

zu lösen (vgl. die Gleichung p. 18 für die gewöhnlichen hexagonalen Rechentafeln).

Anderseits sieht man leicht, dafs auch in dem vorletzten Beispiel (in Nr. II) durch die beiden vereinigten einfachen cartesischen Rechentafeln im Grunde nur auf der x-Achse „zwei vereinigte binäre Skalen" aufgetragen sind. Die hierdurch angeregten Gedanken eröffnen eine weite Perspektive, wie alle unsere bisher ausgeführten Rechentafeln sich in ausgedehnter Weise verallgemeinern lassen. Man vergleiche z. B. noch die schematische Fig. 24 (O. p. 324), welche die gemeinte Erweiterung für die collineare

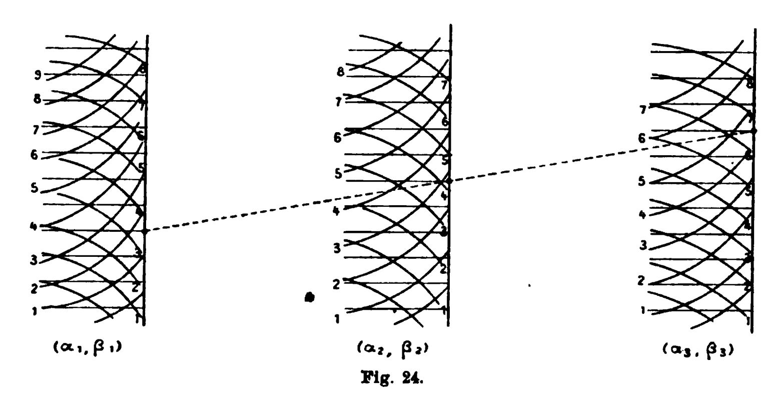


Fig. 24.

Rechentafel darstellt. Man kann eben in dem einzelnen Punkt einer Kurve eine ganze Gruppe von Cotenpaaren (oder in noch weiterer Verallgemeinerung von Cotentripeln etc.) gleichsam kondensiert denken, nach Analogie der auf der x-Achse aufgetragenen binären Skala im Beispiel der Fig. 22. Doch mufs ich mir versagen, im einzelnen dies noch näher auszuführen.

IV. Collineare Rechentafeln mit Systemen von Punkten mit Doppelcoten.

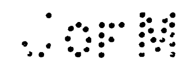
Ich möchte gern noch an einem Beispiel zeigen, wie die Methode, Punkte mit zwei Coten einzuführen, im Falle des collinearen Rechentafeltypus, dem das p. 25 definierte uv-Koordinatensystem zu Grunde liegt, in einer modificierten Weise anzuwenden ist. Wir knüpfen an dieselbe Gleichung wie vorher an:

$$\log A = \log a + n \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) \cdot$$

Auf den u- und v-Achsen, den Geraden ganz rechts und links in der Fig. 25 (O. p. 326), tragen wir die durch die Gleichungen $u = l_1 \log a$ und $v = l_2 n$ bestimmten Skalen in gewohnter Weise auf. (Die betreffenden Zahlwerte der Figur sind mit 10^3 multipliciert zu denken.) Durch Einsetzen ergiebt sich die Gleichung:

$$l_2 u + l_1 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) v - l_1 l_2 \log A = 0.$$

Für jedes Wertepaar r, A stellt sie einen bestimmten Punkt der Ebene mit diesen Werten als Doppelcote dar. Um diese Punkte samt den



Doppelcoten übersichtlich darzustellen, nehmen wir unsere Zuflucht für einen Augenblick zu dem cartesischen $\xi\eta$-Hülfskoordinatensystem. Die letzte Gleichung führt dann zu den beiden folgenden:

$$\xi = \delta \cdot \frac{l_1 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) - l_2}{l_1 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) + l_2}, \quad \eta = \frac{l_1 l_2 \log A}{l_1 \log\left(1 + \frac{r}{100}\right) + l_2},$$

aus denen durch Elimination von r die weitere Gleichung folgt:

$$2\delta y = l_1(\delta - x)\log A.$$

Die drittletzte und letzte dieser Gleichungen enthalten dann bez. nur die

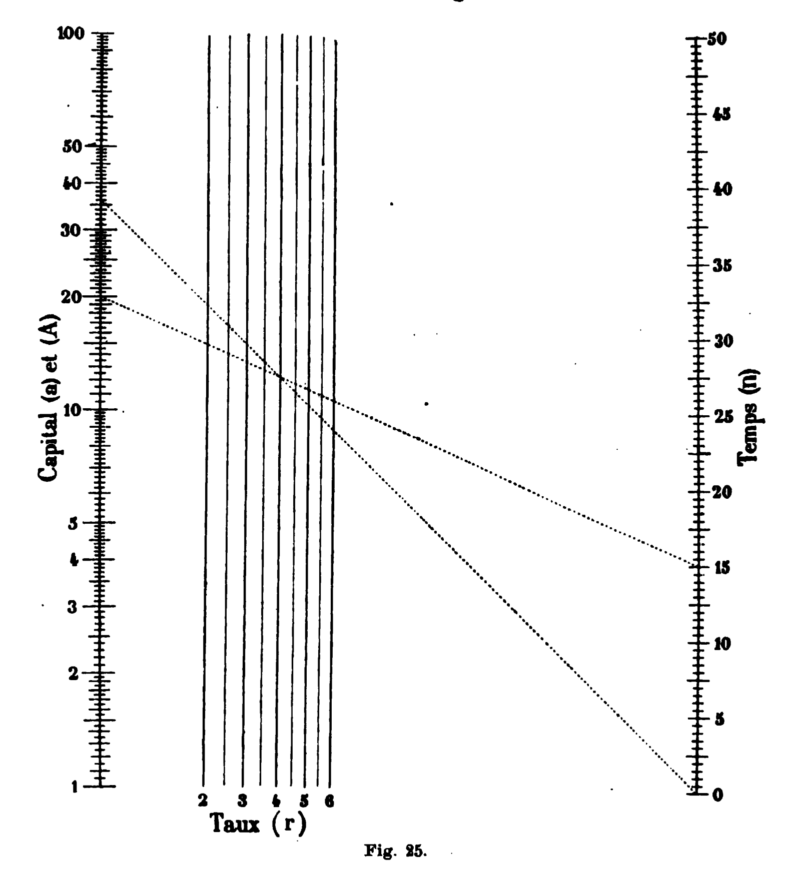


Fig. 25.

Werte r oder A und definieren demgemäfs zwei Scharen cotierter Geraden und zwar ein Büschel zu den uv-Achsen paralleler Geraden (r) und ein Strahlenbüschel durch den Anfangspunkt der v-Achse. Letzteres ist zwar in der Figur nicht eingezeichnet. Wenn man indes das Augenmerk auf die Schnittpunkte der Strahlen mit der u-Achse richtet und ihnen die

Coten ihrer Strahlen beigiebt, so erhält man eine Skala, welche sich als identisch mit jener bereits auf der u-Achse für die Variable a konstruierten erweist. Die Anwendung der Rechentafel sei wieder durch dasselbe Zahlenbeispiel wie p. 38 erläutert. Die Werte $a = 20000$, $n = 15$ liefern den einen der in der Figur punktiert gezeichneten „Indices". Sein Schnittpunkt mit der durch die Cote $r = 4$ bestimmten Vertikalen ist mit dem Nullpunkt der v-Achse durch einen zweiten punktiert gezeichneten Index verbunden, der die u-Achse in einem Punkte schneidet, dessen Cote den gesuchten Wert $A = 36000$ liefert.

In unserem Beispiel ist nur *ein* System von Punkten mit Doppelcoten benutzt, wie ein solches analytisch allgemein durch eine Gleichung der Form $uf(\alpha, \beta) + v\varphi(\alpha, \beta) + \psi(\alpha, \beta) = 0$ mit den beiden Parametern α, β definiert ist und geometrisch durch zwei Scharen cotierter Kurven (α), (β) gewonnen wird. Natürlich wird sich jetzt die Verallgemeinerung von selbst darbieten, alle *drei* Systeme cotierter Punkte aus solchen mit Doppelcoten zusammenzusetzen. Wir haben dann von drei Gleichungen der Form:

$$uf_i(\alpha_i, \beta_i) + v\varphi_i(\alpha_i, \beta_i) + \psi_i(\alpha_i, \beta_i) = 0, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

auszugehen. Das Schema einer solchen Rechentafel, welche zu fünf gegebenen Werten von den Gröfsen α_i, β_i den Wert der noch fehlenden

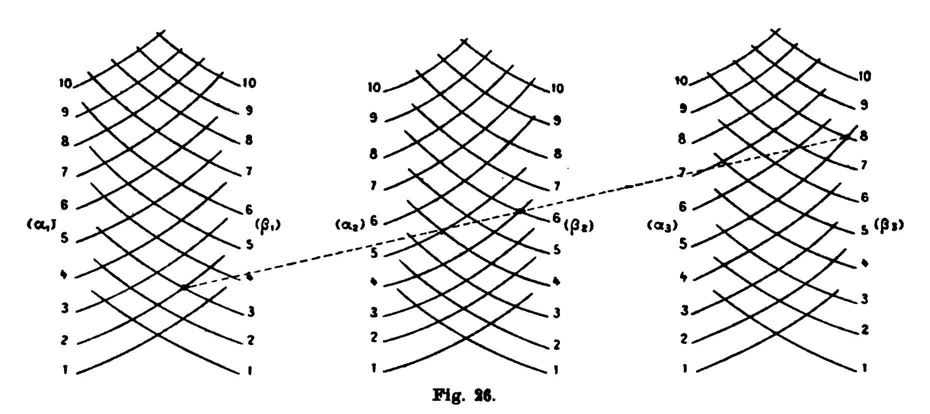


Fig. 26.

sechsten zu finden gestattet, ist in der Fig. 26 (O. p. 322) gegeben. Die allgemeine Gleichungsform, für die eine solche Rechentafel gilt, lautet dann (vgl. p. 24):

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1, \beta_1) & \varphi_1(\alpha_1, \beta_1) & \psi_1(\alpha_1, \beta_1) \\ f_2(\alpha_2, \beta_2) & \varphi_2(\alpha_2, \beta_2) & \psi_2(\alpha_2, \beta_2) \\ f_3(\alpha_3, \beta_3) & \varphi_3(\alpha_3, \beta_3) & \psi_3(\alpha_3, \beta_3) \end{vmatrix} = 0.$$

V. Rechentafeln mit beweglichen Systemen.

Schon früher (p. 11) haben wir bereits die Anwendung beweglicher transparenter Ebenen mit geeigneten „Indices" erwähnt. Dies giebt uns Anlafs die Erweiterung einzuführen, geradezu eine mit cotierten Systemen ausgestattete Ebene in bestimmter Weise gegen eine feste ebenfalls mit cotierten Systemen versehenen Ebene beweglich sein zu lassen. Als das einfachste, aber sehr wichtige Beispiel dieser Art bietet sich der bekannte Rechenschieber dar. Es seien drei parallele Achsen mit den Anfangspunkten O_1, O_2, O_3 gegeben, von denen die mittlere in ihrer Richtung gegen die anderen beweglich ist, während die Anfangspunkte O_1 und O_3 genau über einander liegen (Fig. 27, **O.** p. 357). Hat dann der

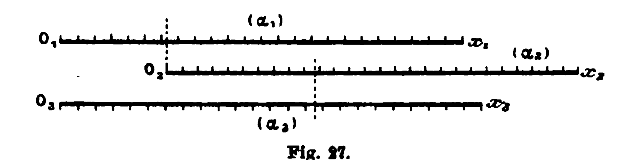


Fig. 27.

Anfangspunkt O_2 die Abscisse x_1 auf der ersten Achse, so fällt der Punkt mit der Abscisse x_2 der zweiten Achse über einen Punkt mit der Abscisse x_3 der dritten Achse, so dafs $x_1 + x_2 = x_3$ ist. Auf den drei Achsen seien nun die drei Skalen $x_i = l_i \cdot f_i(\alpha_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ aufgetragen. Man erkennt, dafs man in der angedeuteten Weise dann mit Hülfe eines solchen Rechenschiebers die Gleichung zwischen drei Variablen $f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) = - f_3(\alpha_3)$ lösen kann, wenn zwei Variable bestimmte Werte bekommen haben. Die gewöhnlich ausgeführte Art dieser Rechenschieber gilt für die Gleichung $\log \alpha_1 + \log \alpha_2 = \log \alpha_3$ oder $\alpha_1 \alpha_2 = \alpha_3$. Da die Skalen (α_1) und (α_3) in diesem Falle identisch sind, so kann man sie einfach zusammenfallen lassen. Dieser „logarithmische Rechenschieber" ist ja in der Hand eines jeden Physikers oder Ingenieurs.

Man übersieht nun sofort eine Menge von Verallgemeinerungen, die sich an die soeben geschilderten Ideen anknüpfen lassen. Ersetzt man z. B. die einfache Skala jeder Achse durch eine „binäre Skala" in dem oben (p. 36) angegebenen Sinne, so erhält man Rechenschieber für die Gleichungsform:

$$f_1(\alpha_1, \beta_1) + f_2(\alpha_2, \beta_2) = - f_3(\alpha_3, \beta_3).$$

Andererseits hindert nichts, Rechenschieber mit mehr als einer längs der Abscissenachse beweglichen Skala zu konstruieren und auf solche Weise die Gleichungsform:

$$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + \cdots + f_{n-1}(\alpha_{n-1}) = - f_n(\alpha_n)$$



zu behandeln, falls man sich mit einfachen Skalen auf den einzelnen Achsen begnügt.

Aber der Phantasie ist jetzt Thür und Thor geöffnet, um noch in weit allgemeinerer Weise neue Rechentafeln auszudenken. Kann man doch zu der Translation der beweglichen Ebene in einer Richtung eine solche in der dazu senkrechten Richtung oder auch eine Rotation hinzunehmen. Nur ein theoretisches Beispiel eines schon ziemlich komplicierten Rechenschiebers mit beweglichen Skalen wollen wir noch erwähnen.

Ausgehend von dem Typus einer gewöhnlichen collinearen Rechentafel mit drei Parallelen als Skalenträger, die der y-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems parallel orientiert sein mögen, wollen wir einmal längs jeder der Funktion $f_i(\alpha_i)$ entsprechenden Skala (α_i), deren Anfangspunkt auf der x-Achse gelegen sei, nach Art des gewöhnlichen Rechenschiebers eine zweite der Funktion $\varphi_i(\beta_i)$ entsprechende Skala (β_i) verschiebbar annehmen (Fig. 28, **O.** p. 365). Aufserdem aber soll jede der

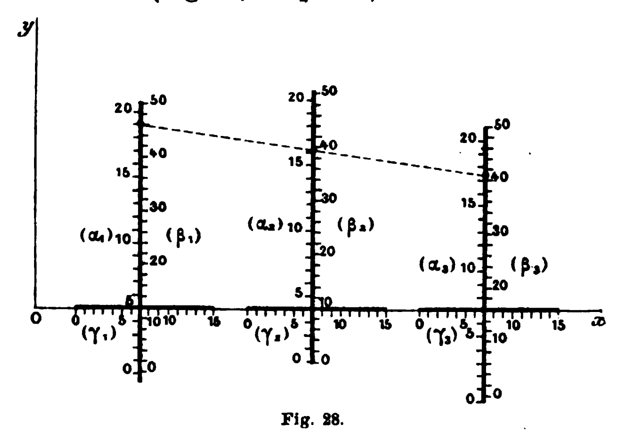


Fig. 28.

so entstehenden Doppelskalen oder Rechenschieber in der zu ihren Trägern senkrechten Richtung, also in der Richtung der x-Achse, verschoben werden können, während auf der x-Achse selbst diesen letzten Verschiebungsmöglichkeiten entsprechend durch drei (von einander unabhängige) Funktionen $\psi_i(\gamma_i)$ definierte Skalen (γ_i) aufgetragen sind. (Der Einfachheit halber sei angenommen, dafs die Moduln aller Skalen einander gleich gewählt sind.) Man sieht leicht, dafs man den Anfangspunkt jeder Skala (β_i) dann sofort so einstellen kann, dafs er die Koordinaten $x_i = l\psi_i(\gamma_i)$, $y_i = l[f_i(\alpha_i) - \varphi_i(\beta_i)]$ besitzt. Zu dem Zweck hat man unter anderem die Punkte mit den Coten α_i und β_i zur Deckung zu bringen. Legt man der Einstellung aller drei Doppelskalen aufserdem die Bedingung auf, dafs die Anfangspunkte der drei Skalen (β_i) in gerader Linie liegen, so erfüllen ihre Koordinaten die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} f_1(\alpha_1) - \varphi_1(\beta_1) & \psi_1(\gamma_1) & 1 \\ f_2(\alpha_2) - \varphi_2(\beta_2) & \psi_2(\gamma_2) & 1 \\ f_3(\alpha_3) - \varphi_3(\beta_3) & \psi_3(\gamma_3) & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Dies ist dann die charakteristische Gleichungsform, die durch die geschilderte Rechentafel darstellbar ist. Die Art ihrer Anwendung, um die neunte der Gröfsen α_i, β_i, γ_i zu bestimmen, wenn acht derselben bekannte Werte haben, dürfte nach dem Vorstehenden leicht zu übersehen sein.

§ 6.

Theoretische Betrachtungen.

Die Nomographie giebt nun auch Anlafs zu einer ganzen Reihe theoretischer Untersuchungen, die besonders das Interesse des reinen Mathematikers erwecken dürften. Ich mufs es mir zwar versagen, im einzelnen auf dieselben hier einzugehen. Doch sei es mir gestattet, wenigstens einige der behandelten Fragestellungen und in aller Kürze ihre Beantwortungen anzuführen.

I. Für jeden Rechentafeltypus ist es, wie wir an vielen Beispielen gesehen haben, möglich, mit Hülfe von willkürlichen Funktionen, d. h. durch Funktionszeichen dargestellten Funktionen, die allgemeinste Gleichungsform zu bilden, auf welche er anwendbar ist. Die willkürlichen Funktionen sollen im folgenden als „Komponenten“ der Gleichungen bezeichnet werden. Es bietet sich nun die Frage dar, *wie einer bestimmten vorgegebenen Gleichung anzusehen ist, ob sie in die zu einem ausgewählten Rechentafeltypus gehörende Gleichungsform übergeführt werden kann und wie im bejahenden Falle die speziellen Ausdrücke für die Komponenten zu finden sind.*

Die allgemeinste Methode zur Lösung dieses Problems ist folgende: Von der zu einem bestimmten Rechentafeltypus gehörenden Gleichungsform ausgehend wird man zuerst versuchen, die willkürlichen Funktionen zu eliminieren, was, falls es gelingt, zu einer partiellen Differentialgleichung führt. Ist dann irgend eine spezielle Gleichung gegeben, so ist, *damit sie in die betreffende Gleichungsform überführbar ist, notwendig und hinreichend, dafs sie eine Lösung der partiellen Differentialgleichung darstellt.* Die Komponenten sind, wenn sie sich nicht unmittelbar ergeben, durch zweckmäfsige Integrationen zu bestimmen. Doch dieser ja sehr methodische Weg läfst sich in der Praxis nicht immer ausführen, da die Differentialrechnung zwar theoretisch die Mittel liefert, die willkürlichen Funktionen zu eliminieren, bei der praktischen Durchführung sich aber im allgemeinen noch grofse Schwierigkeiten einstellen.

Wir wollen unsere Betrachtungen sogleich etwas ins Spezielle wenden. Zunächst sei folgendes bemerkt: Was Gleichungen mit zwei Variablen betrifft, so ist jeder Rechentafeltypus auf eine beliebige solche Gleichung anwendbar. Hier würde es sich nur um eine geeignete Bestimmungsmethode der Komponenten handeln. Auch für Gleichungen mit drei Variablen existieren gewisse Rechentafeltypen, die in jedem Falle anwendbar sind. Anders ist es im Falle einer Gleichung mit vier oder mehr Variablen. Hier ist vor allem erst die Möglichkeit nachzuweisen, dafs die vorgelegte Gleichung überhaupt durch irgend einen Rechentafeltypus darstellbar ist.

Wir wollen sodann die wenigen Gleichungsformen anführen, für die das oben skizzierte Problem bereits durchgeführt oder in Angriff genommen ist:

1) $$f_1(\alpha_1) + f_2(\alpha_2) + f_3(\alpha_3) = 0$$

oder auch

1′) $f_1(\alpha_1) \cdot f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2) = 0.$ (Diese zweite Gleichungsform ist ja durch Logarithmieren auf die erste zurückführbar [vgl. p. 17 und p. 28]).

2) $$f_1(\alpha_1) f_3(\alpha_3) + f_2(\alpha_2)\, \varphi_3(\alpha_3) + \psi_3(\alpha_3) = 0$$

(vgl. p. 31).

3) $$| f_i \; \varphi_i \; \psi_i | = 0$$

(vgl. p. 20 und 24).

Die Bestimmung der charakteristischen partiellen Differentialgleichung ist nun bereits durchgeführt für die Gleichungsformen 1), 1′) und 2), die in der Praxis auch sich zumeist darbieten. Für die Gleichungsform 3) bleibt die Elimination der willkürlichen Funktionen zwar noch zu leisten übrig. Doch ist es Herrn *E. Duporcq* (vgl. **O.** p. 427) gelungen, aus dieser Gleichungsform gewisse Funktionalgleichungen abzuleiten, deren Befriedigung durch eine gegebene Gleichung die notwendige und hinreichende Bedingung darstellt, damit die Gleichung in die Form 3) überführbar ist.

Wir beschränken uns darauf, die partielle Differentialgleichung der Gleichungsform 1) anzuführen. Sie lautet, wenn $F(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = 0$ die gegebene Gleichung ist, einfach:

$$\frac{\partial^2 \log r}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} = 0, \quad \text{wo} \quad r = \frac{\partial F}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} \quad \text{ist.}$$

Auch giebt die durchgeführte Untersuchung, die wir hier nicht wiedergeben wollen, zugleich die Methode an, nach der man in jedem Falle die Komponenten f_1, f_2, f_3 selbst wirklich bilden kann. Die Gleichung:

$$\alpha_3 - \alpha_1 \alpha_2 + \sqrt{1 + \alpha_1^2}\sqrt{1 + \alpha_2^2} = 0$$

erfüllt z. B. die partielle Differentialgleichung; die Gleichungsform 1) lautet für sie:

$$\log(\alpha_1 + \sqrt{1+\alpha_1^2}) + \log(\alpha_2 + \sqrt{1+\alpha_2^2}) = \log(\alpha_3 + \sqrt{\alpha_3^2 - 1}).$$

II. Die dritte Gleichungsform $|f_i\ \varphi_i\ \psi_i| = 0$ ist noch nach einer anderen Richtung hin zum Ausgangspunkt einer speziellen Untersuchung gewählt worden. Sie gehört ja, wie wir gesehen haben, zu dem wichtigen Typus der collinearen Rechentafeln. Vorausgesetzt sei jetzt, dafs f_i, φ_i, ψ_i *ganze lineare Funktionen* seien. Dann sind z. B. in den collinearen Rechentafeln die drei Systeme cotierter Punkte *lineare* Punktreihen. Es zeigt sich, dafs in diesem Falle die gegebene Gleichungsform die spezielle Gestalt annimmt:

$$A\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + B_1\alpha_2\alpha_3 + B_2\alpha_3\alpha_1 + B_3\alpha_1\alpha_2 + C_1\alpha_1 + C_2\alpha_2 + C_3\alpha_3 + D = 0.$$

Als *erste* Frage bietet sich jetzt unmittelbar die folgende dar:

Welches ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs umgekehrt irgend eine Gleichung der soeben angeführten Form durch den collinearen Rechentafeltypus darstellbar ist? Bei der Beantwortung dieser Frage ist eben zu beachten, dafs die Komponenten *reelle* Koefficienten haben müssen.

Als Resultat der Untersuchung ergiebt sich: *Damit eine solche Gleichung durch drei lineare Systeme cotierter Punkte darstellbar ist, ist notwendig und hinreichend, dafs ihre Discriminante Δ gröfser oder gleich* 0 *ist, wo*

$$\Delta = (B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 - AD)^2$$
$$- 4(B_1C_1B_2C_2 + B_2C_2B_3C_3 + B_3C_3B_1C_1 - AC_1C_2C_3 - B_1B_2B_3D)$$

ist.

Doch da man die einzelne Rechentafel noch durch projektive Transformation umformen kann, so hat die weitere Untersuchung sich auf die Auswahl einer möglichst einfachen Form der Tafel zu erstrecken. Wie dies gemeint ist, läfst die *zweite* Frage erkennen: *Wie viele der linearen Skalen kann man durch Ausführung einer projektiven Transformation in reguläre Skalen* (vgl. p. 26) *verwandeln?* Es ergiebt sich folgendes:

Die drei linearen Systeme können sämtlich in reguläre übergeführt werden, wenn A von 0 *verschieden ist und aufserdem entweder die Gröfsen E_1, E_2, E_3, wo $E_1 = AC_1 - B_2B_3$ ist und analog E_2, E_3 zu bilden sind, alle drei von* 0 *verschieden sind oder aber zwei von ihnen* 0 *sind, die dritte und Δ entweder beide* 0 *oder beide nicht* 0 *sind.*

Nur eines der drei linearen Systeme kann regulär gemacht werden, wenn E_1, E_2, E_3 sämtlich 0 *sind, A und Δ aber von* 0 *verschieden. In allen übrigen Fällen kann man zwei der Systeme regulär machen.*

III. Auf p. 22 haben wir als Gleichungsform für den Typus einer cartesischen Rechentafel mit zwei Systemen von Geraden und einem solchen von Kreisen:

$$a_3 \cdot [(\varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1)^2 + (\psi_1 f_2 - \psi_2 f_1)^2] + (f_1 \varphi_2 - f_2 \varphi_1) \cdot |f_i\, \varphi_i\, \psi_i| = 0$$

kennen gelernt. Mit dieser Gleichung soll nun die in den Variablen α_1, α_2, α_3 quadratische Gleichung:

$$A_1 \alpha_1^2 + A_2 \alpha_2^2 + A_3 \alpha_3^2 + 2 B_1 \alpha_2 \alpha_3 + 2 B_2 \alpha_3 \alpha_1 + 2 B_3 \alpha_1 \alpha_2$$
$$+ 2 C_1 \alpha_1 + 2 C_2 \alpha_2 + 2 C_3 \alpha_3 + D = 0$$

verglichen werden, indem wir die Frage aufwerfen:

Unter welchen Bedingungen läfst sich die letzte Gleichung durch den erwähnten Rechentafeltypus darstellen?

Das Resultat kann man in einfacher Weise geometrisch folgendermafsen aussprechen:

Wenn die Variablen α_1, α_2, α_3 *der letzten Gleichung als cartesische rechtwinklige Punktkoordinaten gedeutet werden, so ist notwendig und hinreichend, dafs der Schnitt einer der Koordinatenebenen mit der durch die Gleichung dargestellten Fläche zweiten Grades von elliptischem Typus ist, d. h. dafs* $A_i A_j - B_k^2 > 0$ *ist, wenigstens für irgend eine Ersetzung der Indices durch* 1, 2, 3.

Es sei dem Leser überlassen, die allgemeinen, sich auf *algebraische* Gleichungen beziehenden Fragestellungen zu formulieren, für welche wir in den letzten beiden Nummern Beispiele kennen gelernt haben.

